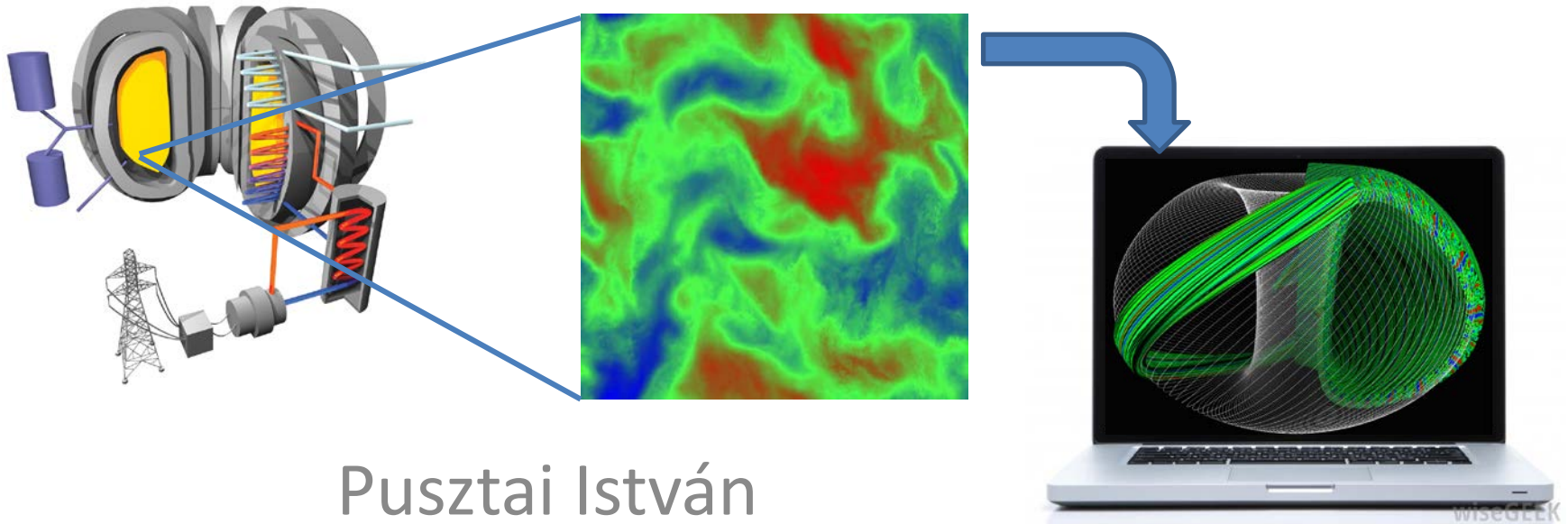


Számítógépes plazmafizika: szuper-részecskéktől a hiper-diffúzióig



Pusztai István

Chalmers University of Technology,
Division of Subatomic and Plasma Physics



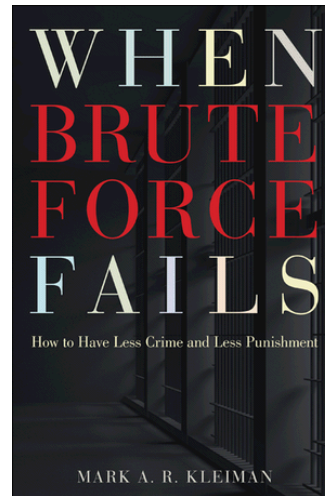
CHALMERS

Áttekintés

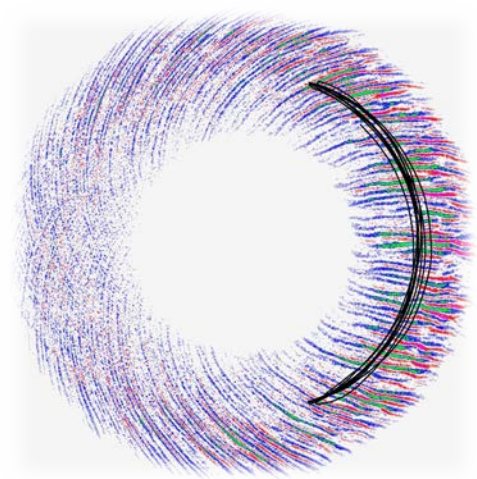
A Szent Grál



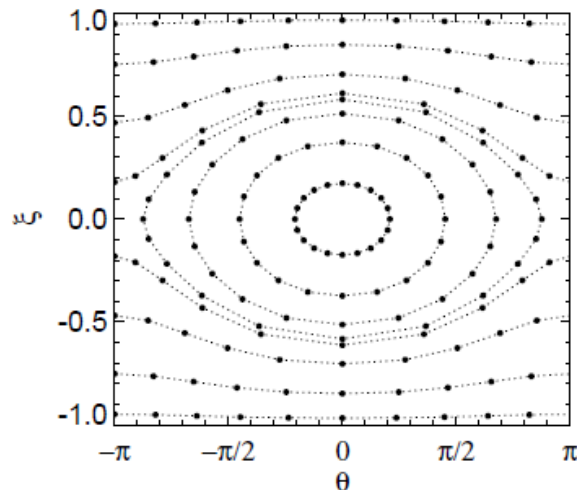
A nyers erő módszere



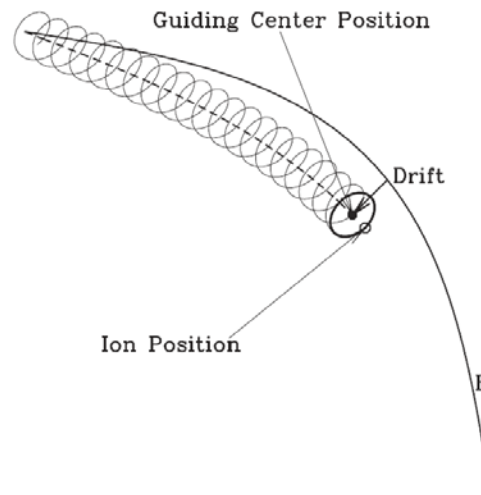
Particle-In-Cell



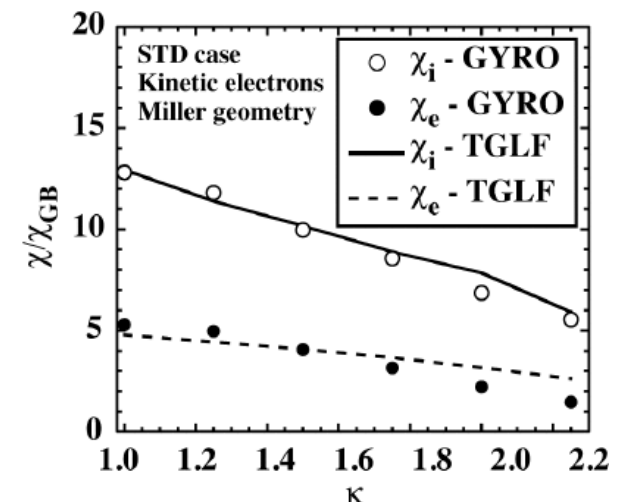
Kontinuum modellek



Girokinetika



Egyszerűsített modellek



A Szent Grál

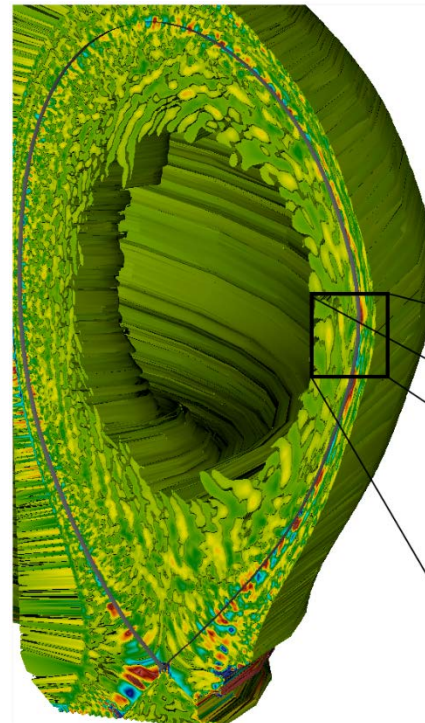
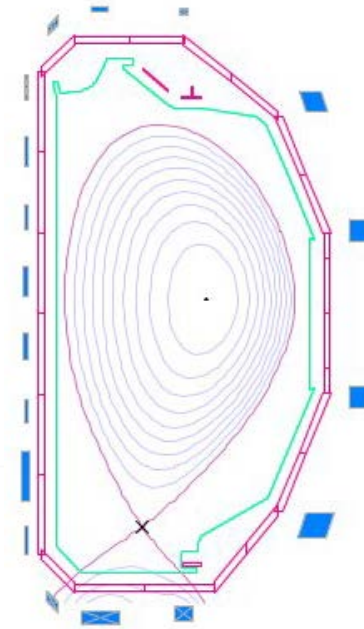
- Cél: Fúziós berendezés üzemeltetése biztonságosan és hatékonyan.
- Ideális lenne egy **szintetikus fúziós plazma**: A plazma teljes önkonzisztens numerikus modellezése szabad paraméterek nélkül
- A plazma teljes állapotának időbeli fejlődése a kísérleti berendezés gombjainak állása függvényében, lehetőség szerint valós időben
- Releváns skálák az elektron Larmor mozgásától ($\rho_e \sim 10^{-5}$ m, $1/\Omega_e \sim 10^{-12}$ s) a berendezés méretéig (~ 1 m) és az összetartási időig (~ 1 s)



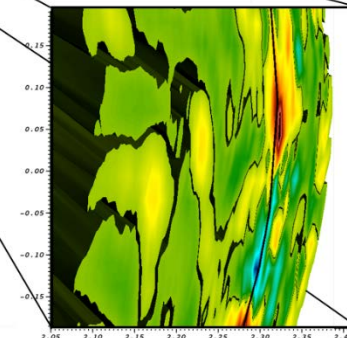
Problémák szeparálása

- Hatalmas idő- és térbeli skálákat átfogó folyamatok
- A jó plazma-összetartásnak köszönhetően bizonyos folyamatok szeparálhatóak idő és térbeli skálájuk szerint.
- Példák:
 - i. Plazma mágneses egyensúly és turbulens fluktuációk
 - ii. Ütközéses transzport és turbulens transzport.
- Egyszerre csak egy folyamatra összpontosítunk, ami megkönnyíti a modellezést. Még így is bonyolult problémák.

Mágneses
egyensúly

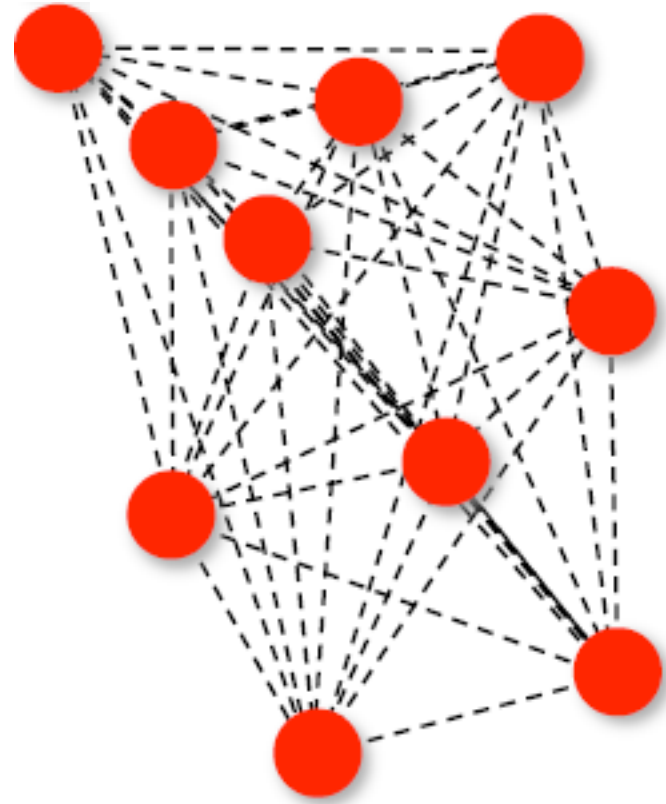


Turbulens
fluktuációk



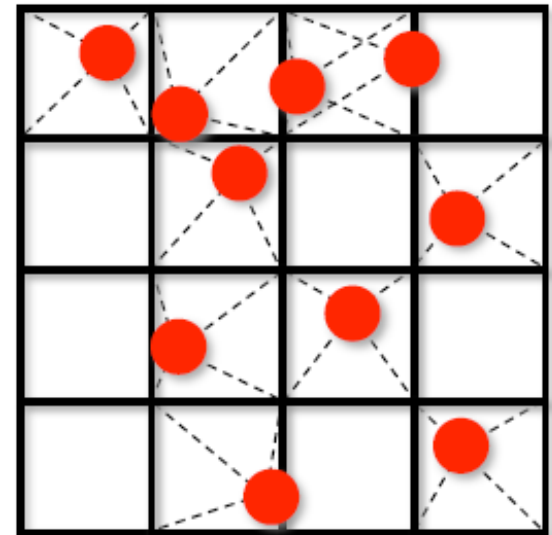
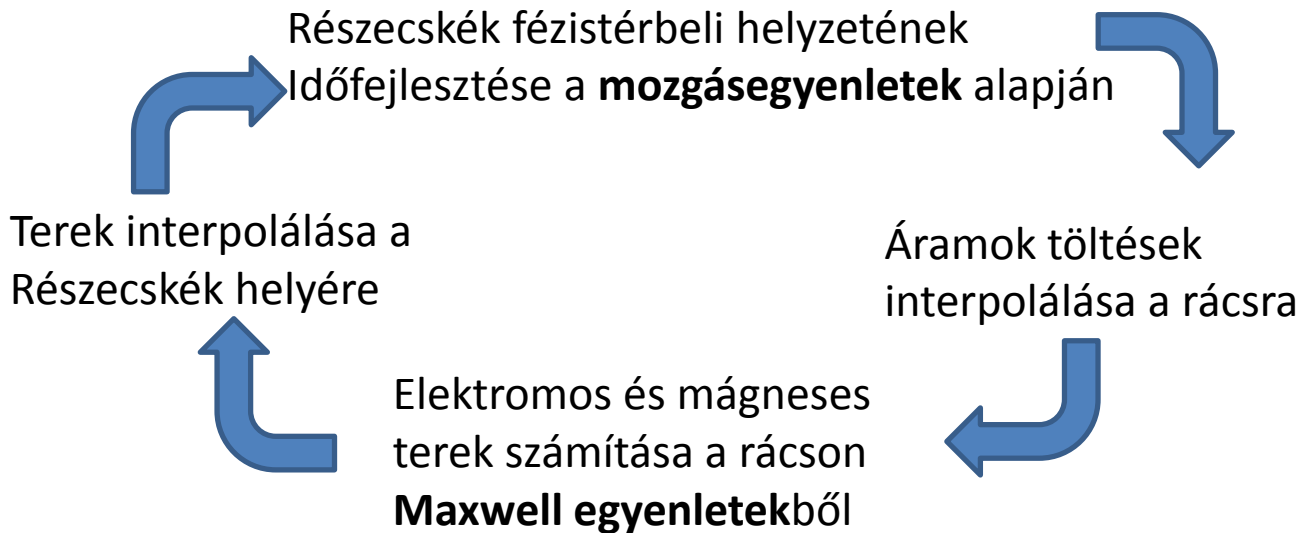
A nyers erő módszere: részecske leírás

- Egy töltésekből álló klasszikus rendszert szeretnénk leírni:
 - i. Lorentz erő + Newton mozgás egyenlete a részecskékre
 - ii. Mozgó részecskék által keltett elektromos és mágneses terek
- Még egy részecske követése is elég számításigényes, ha **E** és **B** ismertek
- Összesen $N_p \sim 10^{20}$ részecske a berendezésben
- Kölcsönhatás minden részecske pár között $\propto N_p^2$ egyenlethez vezet



Particle-In-cell módszer

- A plazmát szuper-részecskékkel reprezentáljuk
- A töltés- és áramsűrűséget, majd a belőlük számolt tereket egy rácson értékeljük ki
- Előny: nem kell az összes bináris kölcsönhatást figyelembevenni



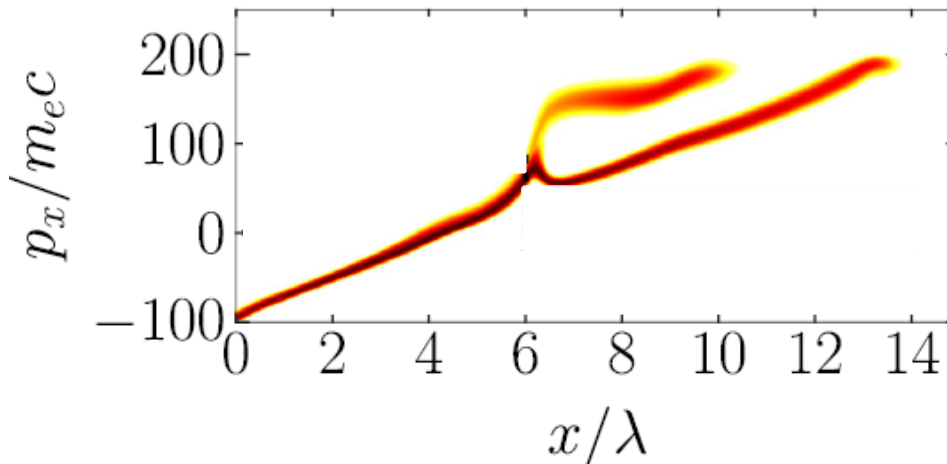
Particle-In-Cell tulajdonságai

Előnyök

- A részecskék mozgásának számítása könnyen párhuzamosítható
- Átlátható algoritmus
- Nem pazarol erőforrásokat a sebesség-tér üres részeire
- "Végső megoldás"

Nehézségek

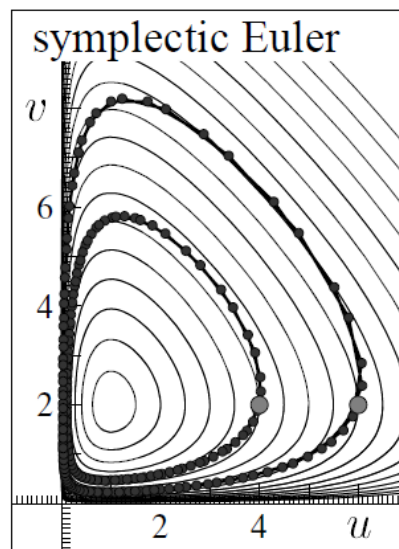
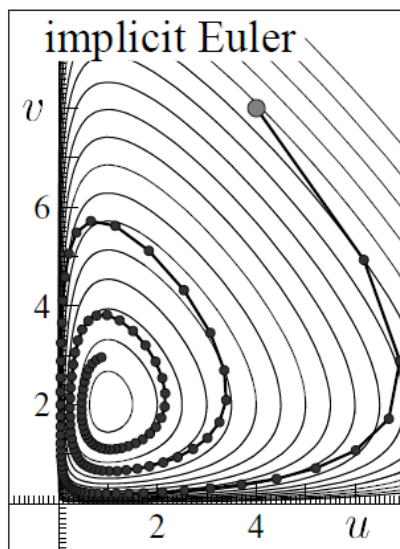
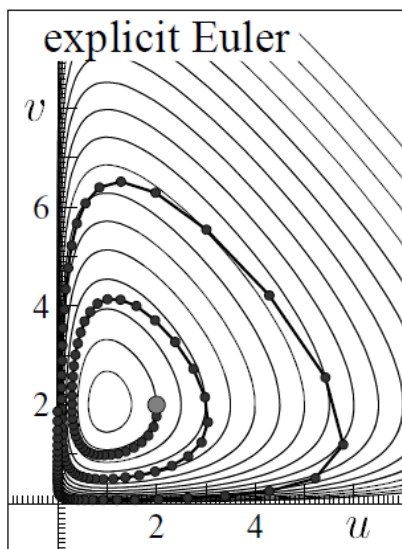
- Statisztikus zaj ($\propto 1/\sqrt{N}$) a részecskék viszonylag alacsony száma miatt
- Furfangos megoldási módszerek nélkül az időlépés a plazma frekvenciával és a rács térbeli felbontása a Debye-hosszal összemérhető
- Elektronok és ionok együttes kinetikus modellezése nagyon számításigényes



Tipikus PIC-hez illő probléma:
Ion gyorsítás lézer által generált
ütközésmentes lökéshullámban
A fázistér (x, p_x) nagyrésze üres!

Geometriai integrátorok

- Liouville: Az eloszlásfüggvény konstans a fázistérbeli trajektóriák mentén.
- PIC: Hosszú időfejlesztés után a részecskék hajlamosak összegyűlni a fázistér bizonyos részeiben.
- Energia (és egyéb mennyiségek) megmaradása fontos lehet



Kezdeti érték probléma
 $y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0$

Explicit

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

Implicit

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$$

$$u' = a(u, v),$$

$$v' = b(u, v)$$

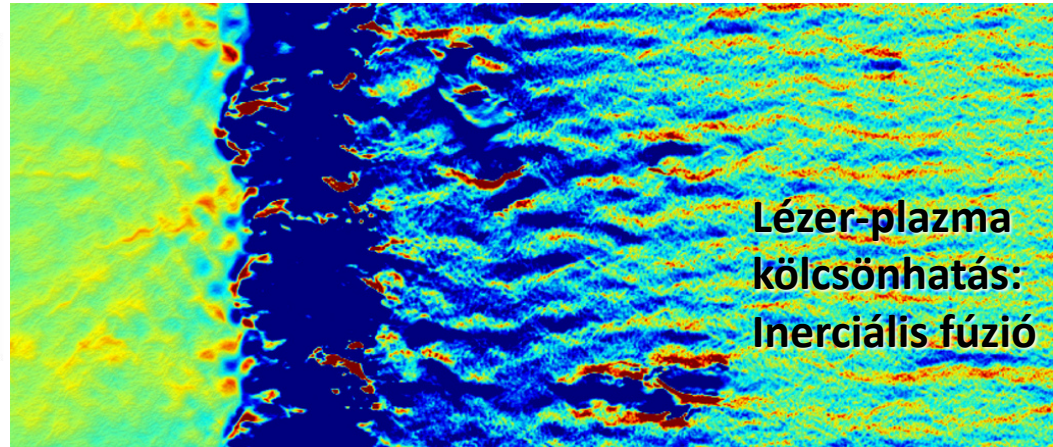
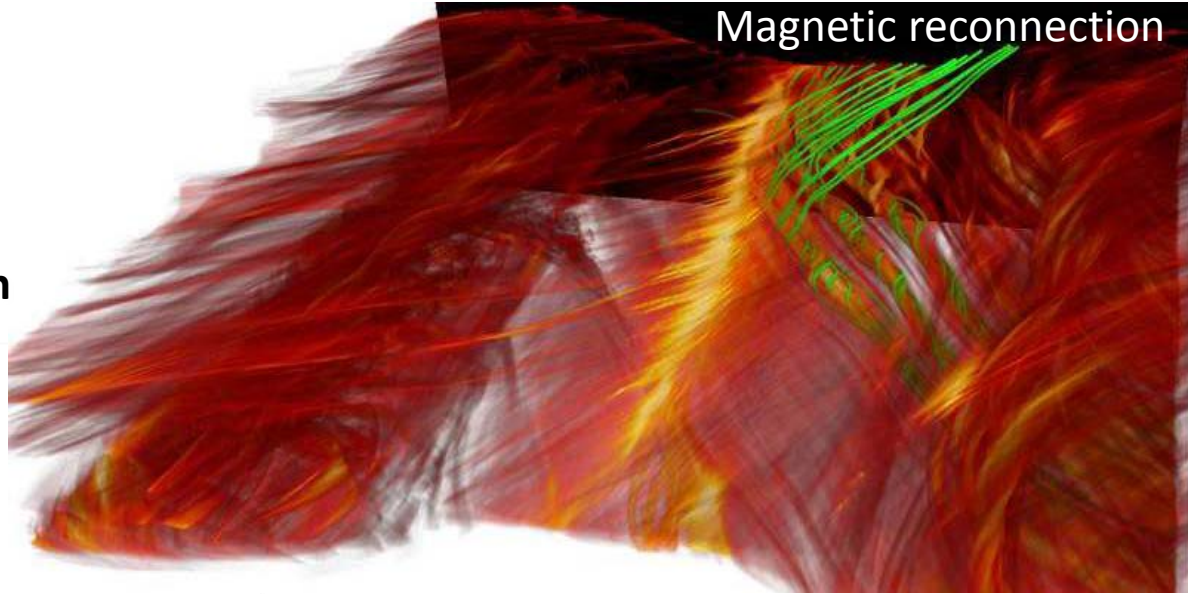
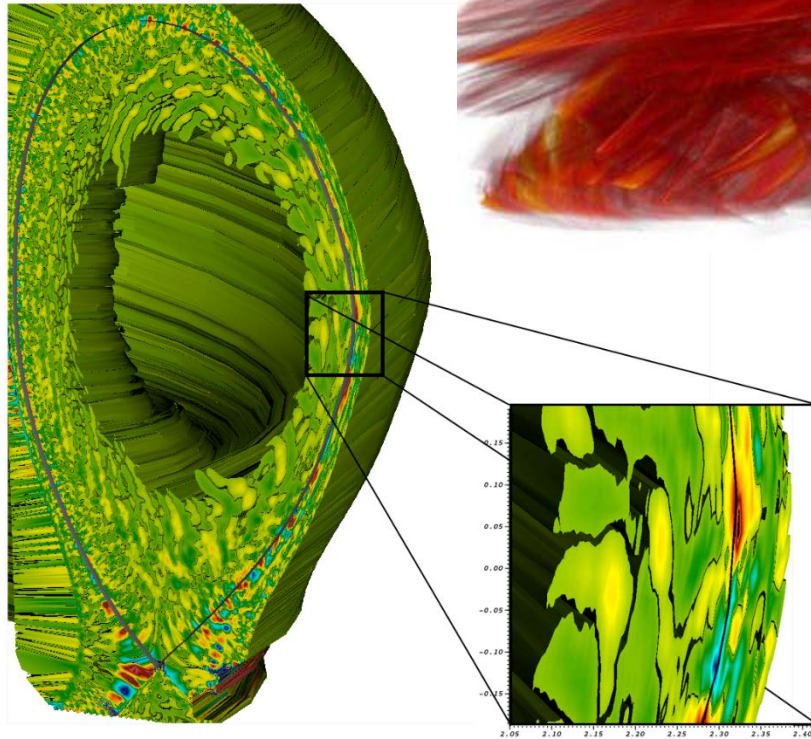
Symplectic:

$$u_{n+1} = u_n + ha(u_{n+1}, v_n)$$

$$v_{n+1} = v_n + hb(u_{n+1}, v_n)$$

Tipikus Particle-In-Cell problémák

Transzport-gát
tokamak szél-plazmában



Kinetikus leírás

- Elegendő részecske statisztikus leíráshoz
- Eloszlásfüggvény: részecske sűrűség a fázistérben

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

- **Fokker-Planck egyenlet** a részecske megmaradás egyenlete a fázistérben

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C[f] \quad (+S)$$

- Lorentz erő: $\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

- Anyagi egyenletek: $\rho = \sum_a q_a \int d^3v f$ $\mathbf{j} = \sum_a q_a \int d^3v \mathbf{v} f$

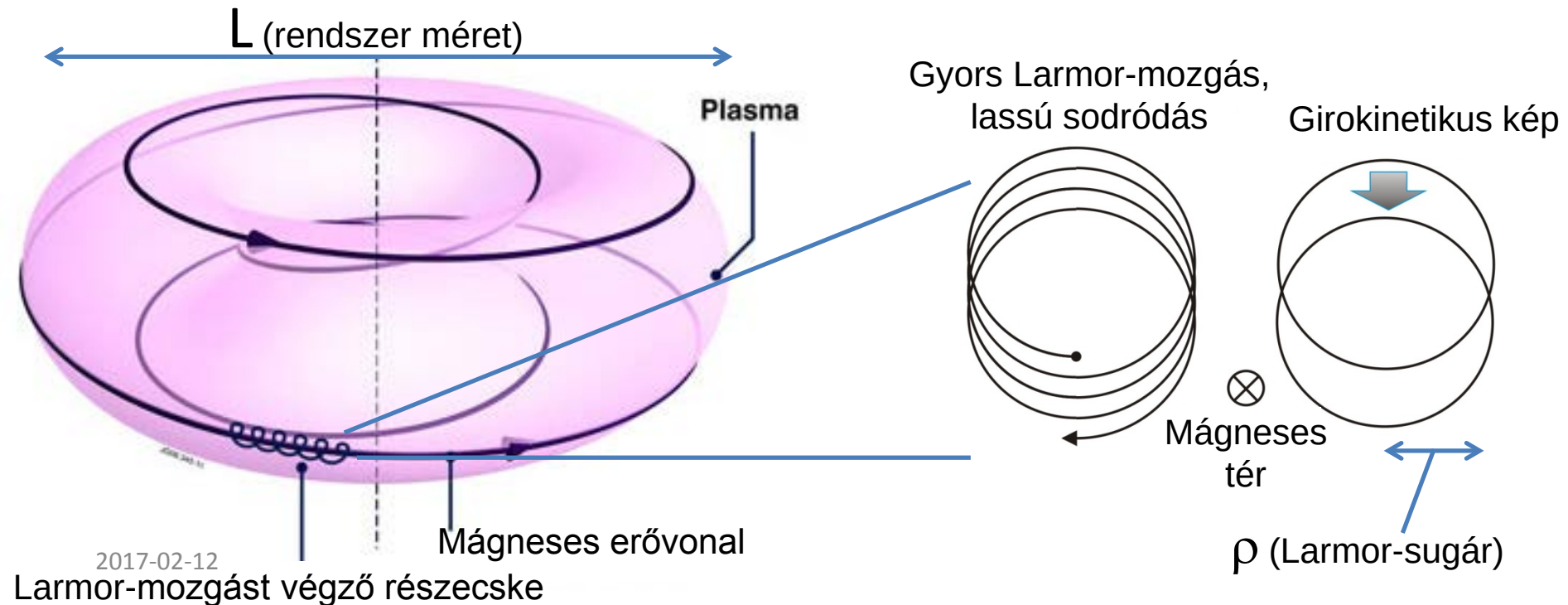
- Pre-Maxwell egyenletek: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

A teljes kinetikus leírás nehézségei

- **7 dimenziós probléma:** konfigurációs tér + sebesség tér + idő
- Külön Fokker-Planck egyenlet minden részecske típusra, melyek csatoltak
- Az elektromos és mágneses terek függnak a részecskék eloszlásfüggvényétől → **Nemlinearitás, integro-differenciál egyenlet**
- Makroszkopikus effektusokra ($\sim$ nagy, lassú) vagyunk kíváncsiak, amelyeket mikroszkopikus ($\sim$ kicsi, gyors) folyamatok idéznek elő:
idő és méretskálák problémája
- Elektronok és ionok dinamikája szintén szeparált idő és méretskálákon történik a tömegük különbözősége miatt.
- Nyers erő: A 7 dimenziós problémát diszkretizáljuk és megoldjuk:
- A hatalmas numerikus igény miatt a legkisebb fizikailag releváns problémát sem tudnánk megoldani.
- Numerikus instabilitások

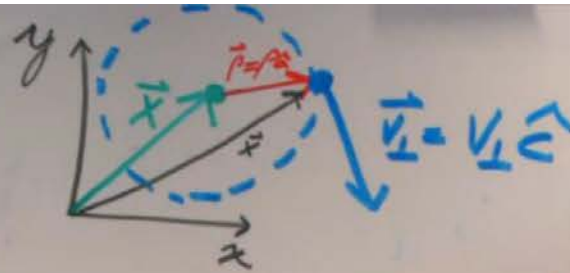
Mágnesezett plazmák modellezése

- Az erős mágneses tér miatt a Larmor-sugár jóval kisebb, mint a berendezés mérete
- A turbulencia időskálája jóval hosszabb, mint a Larmor-mozgásé, fizikai mennyiségek átlagolása a Larmor-mozgás periódusára
- Perturbációelmélet a kinetikus egyenletre

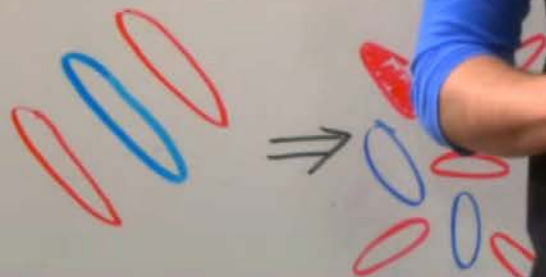


Miközben Pasadena-ban...

Right. Tell me something new.



$$\chi_i = \rho_i^2 \frac{v_{ti}}{R} \left(\frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T, \text{int}}(P_i)} \right) \times \left(1 - \frac{\delta_{\text{shear}}}{\gamma_{\text{lin}}} \right)$$
$$\frac{1}{L_T} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dR}$$



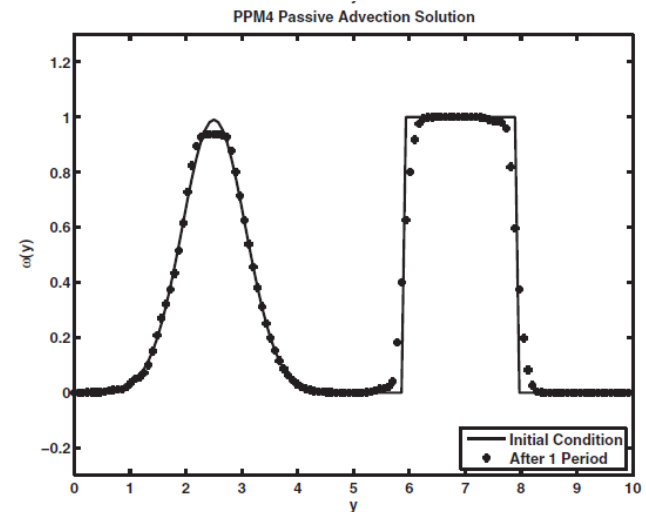
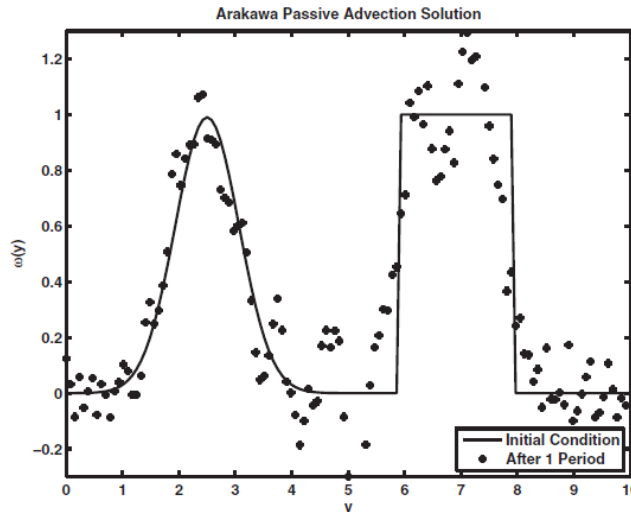
Kontinuum modellek

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\mathbf{A}f + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbb{D}f) \right] + S$$

- $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$ és $\mathbb{D}$ függenek az összes részecsketípus eloszlásainak integráljaitól
- Advekciós és diffúziós jellegű részek
- Advekció: numerikusan nehezen kezelhető, szakadós megoldások. Monoton folyamat: nem tud lokális minimumokat és maximumokat generálni a semmiből. Fizikailag: f soha nem lesz negatív.

Passzív advekció
periodikus tartományon:
A monotonicitást és éles
változásokat csak
kifinomult numerikus
eljárásokkal lehet
megőrizni

2017-02-12

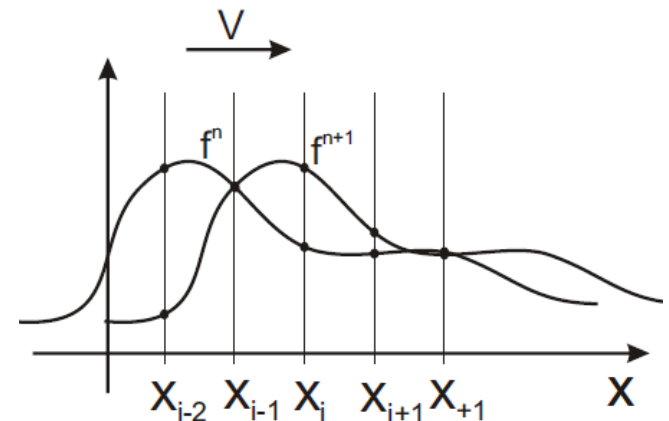


Kontinuum (Euler-típusú) modellek

- Véges differenciák módszere: egy fix hálón diszkrétizáljuk az eloszlásfüggvényt és az egyenletet
- A probléma lineáris része egy mátrix egyenletet ad, amit implicit módszerek esetén invertálni kell
- A nemlinearitás matematikailag ekvivalens az összenyomhatatlan folyadékoknál jelentkező nemlinearitással (Poisson-féle zárójel alakra hozható). Ismert folyadék elméleti megoldások (pl. Arakawa séma)
- Advekción hajlamos rács-skálájú numerikus instabilitásokat generálni.
Probléma: az áramlás meghatározza az információ-terjedés irányát. *Upwinding* sémák
- Mesterséges diffúzió (pl. Hiper-diffúzió) hozzáadása az egyenlethez
(ez mesterséges echo problémákon is segít)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f = 0$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + V \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$



Spektrális diszkretizálás

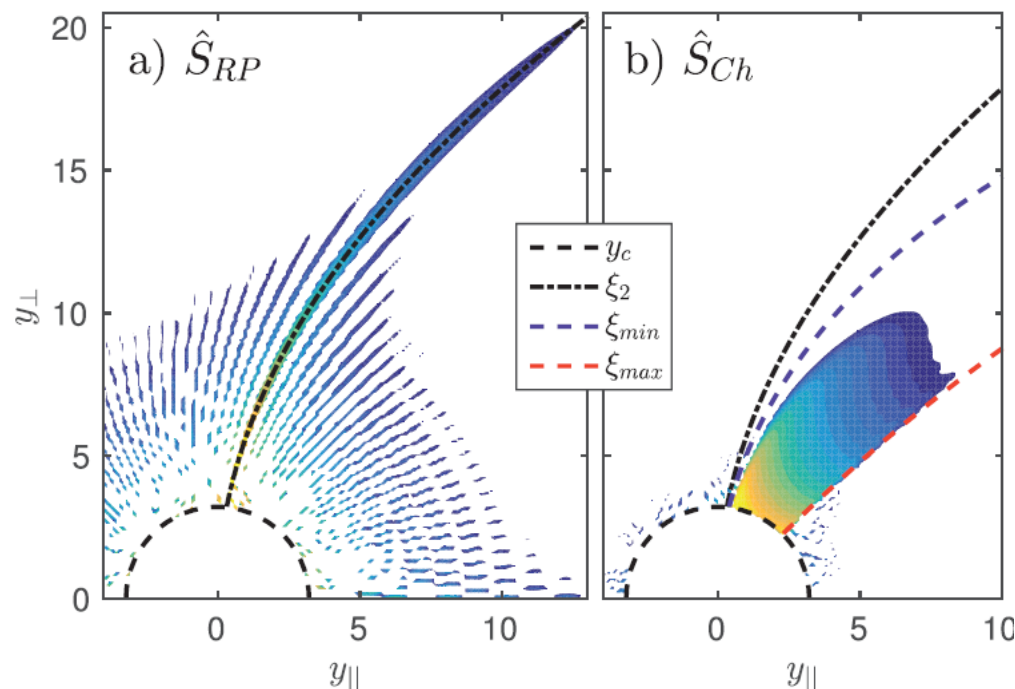
- A rendszer szimmetriával rendelkezik (pl. Forgásszimmetria a tokamak tengelye körül)
- Kifejtés kiterjedt bázisfüggvényeken (Fourier sor, ortogonális polinomok)
- Váges számú harmonikus megtartása, információvesztés kis méretskálákon: Gibbs jelenség (oszilláció éles változások mellett)

Ütközési operátor egy jelentős részének sajátfüggvényei a gömbharmonikusok

Ütközés gömbszimmetrikus, de a mágneses tér kijelöl egy kitüntetett irányt

$\cos(\theta)$ Legendre-polinomjai szerinti kifejtés

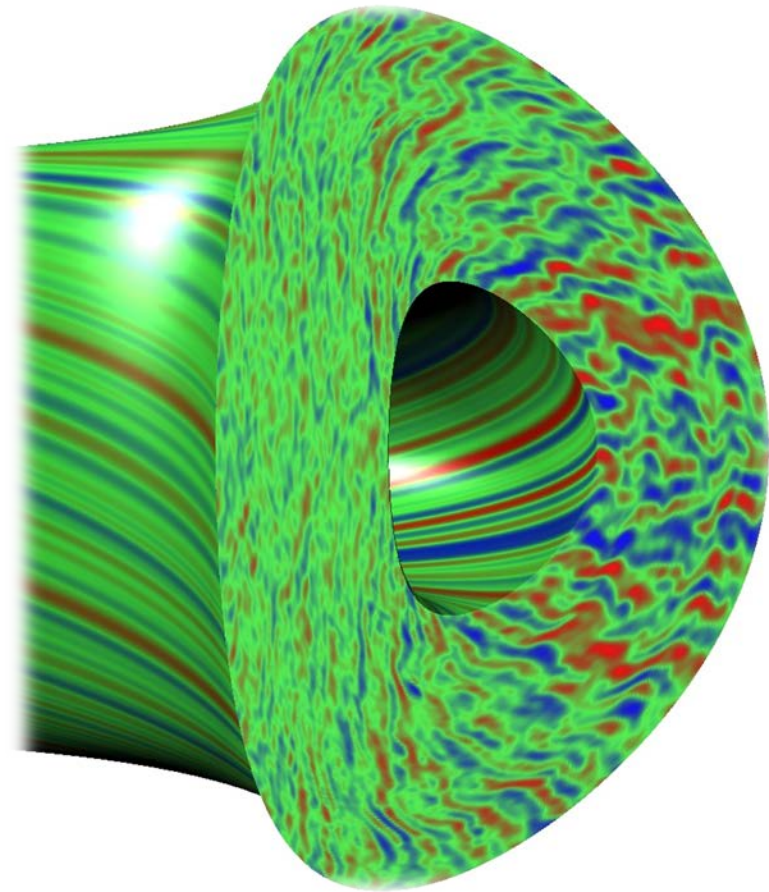
Dirac delta szerű forrás Gibbs oszcillációt okoz



Turbulencia-releváns egyszerűsítések

Geometria

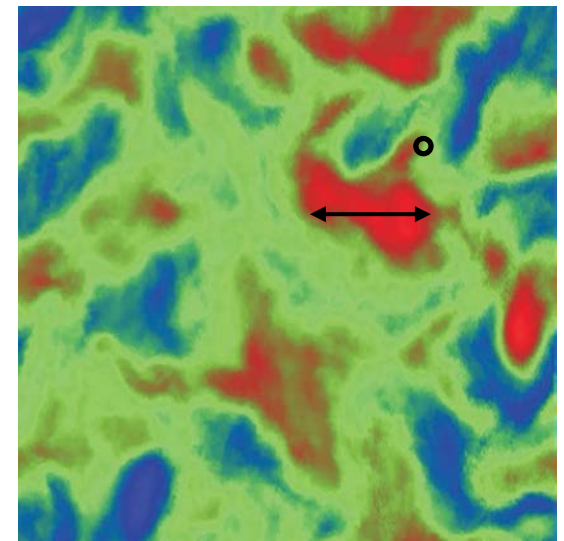
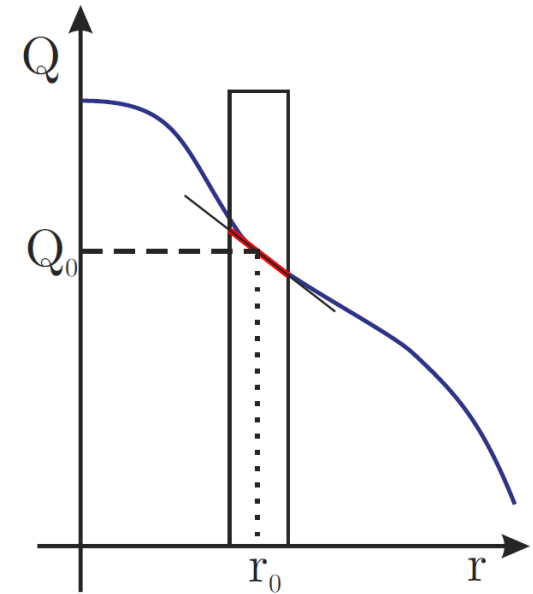
- Erősen anizotróp turbulens struktúrák:
Párhuzamos $\sim$ rendszerméret
merőleges $\sim$ Larmor-sugár
- Párhuzamos dinamika sokkal gyorsabb mint a merőleges
- Egyszerű derékszögű koordináták:
párhuzamos mozgás kis hibája
tönkretenné a merőleges mozgást
→ Erővonalkövető koordináták



Turbulencia-releváns egyszerűsítések

Lokális modellezés

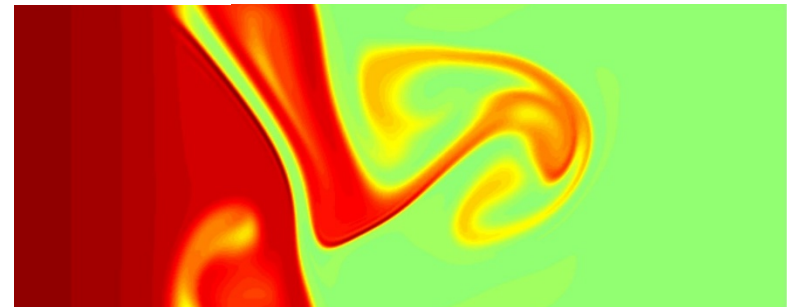
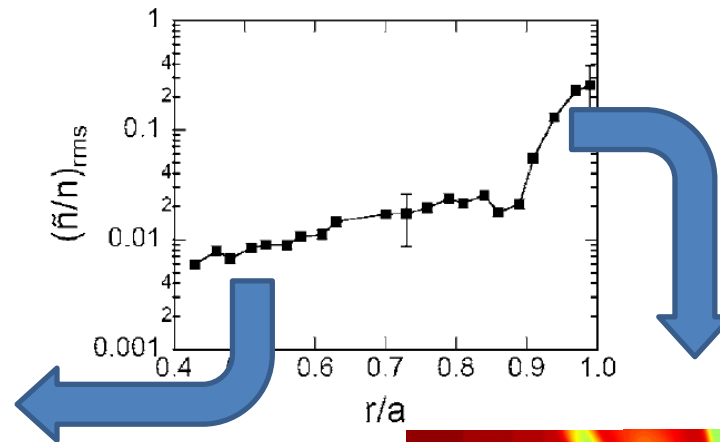
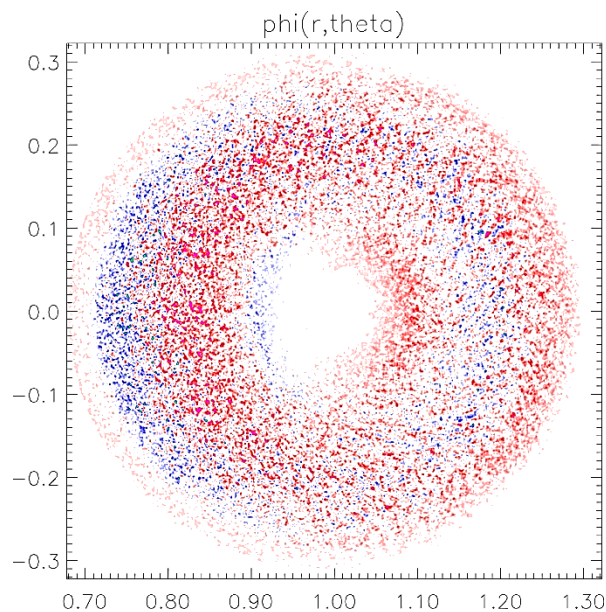
- A radiális korrelációs hossz sokkal kisebb mint a kissugár
- Plazma paraméterek és mágneses felületek alakja nem változik jelentősen
- Paraméterek és deriváltjaik konstansnak tekinthetők a szimulációs tartományon belül
- Periodikus peremfeltételek



Turbulencia-releváns egyszerűsítések

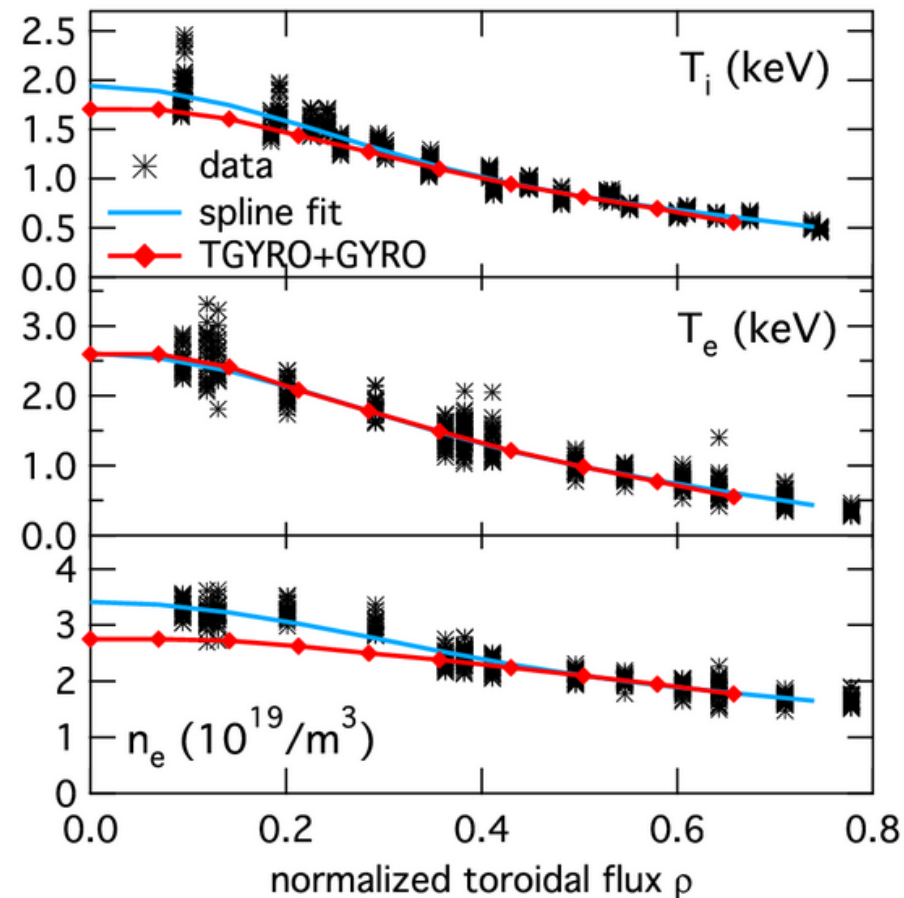
Kis perturbációk

- A plazma nagy részében az eloszlásfüggvény közel van a lokális termodinamikai egyensúlyhoz: fluktuációk kicsik
- Modellezzük csupán a Maxwell eloszlástól való eltérést: δf módszer
- Ütközések: linearizált operátorok használhatóak
- Plazmaszél: fluktuációk összemérhetők a háttérrel: **full-f** módszer



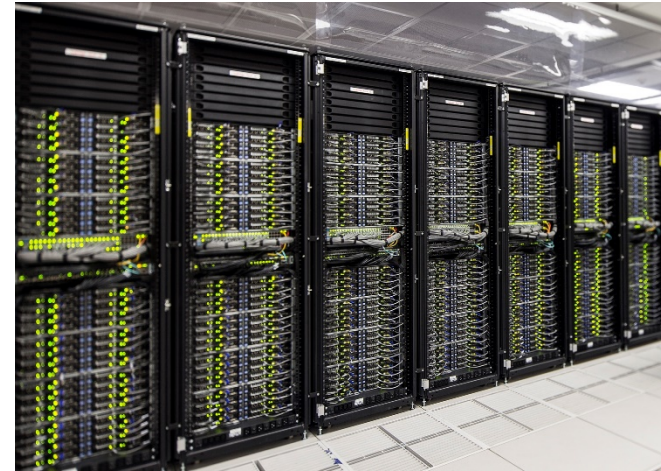
Önkonzisztens modellezés

- Mágneses egyensúly és fűtés adott
- Radiális transzport fluxusok megmaradási egyenletekből
- Turbulens és ütközéses transzport számítása egy radiális hálón
- Profilok evolúciója, ameddig a radiális fluxusok megegyeznek a kísérlettel
- Teljes önkonzisztens modellezéshez a mágneses egyensúlyt és a fűtés modellezést is kell iterálni
- Nem Maxwell forró ionok problémája
- Hihetetlen nagy számításigény



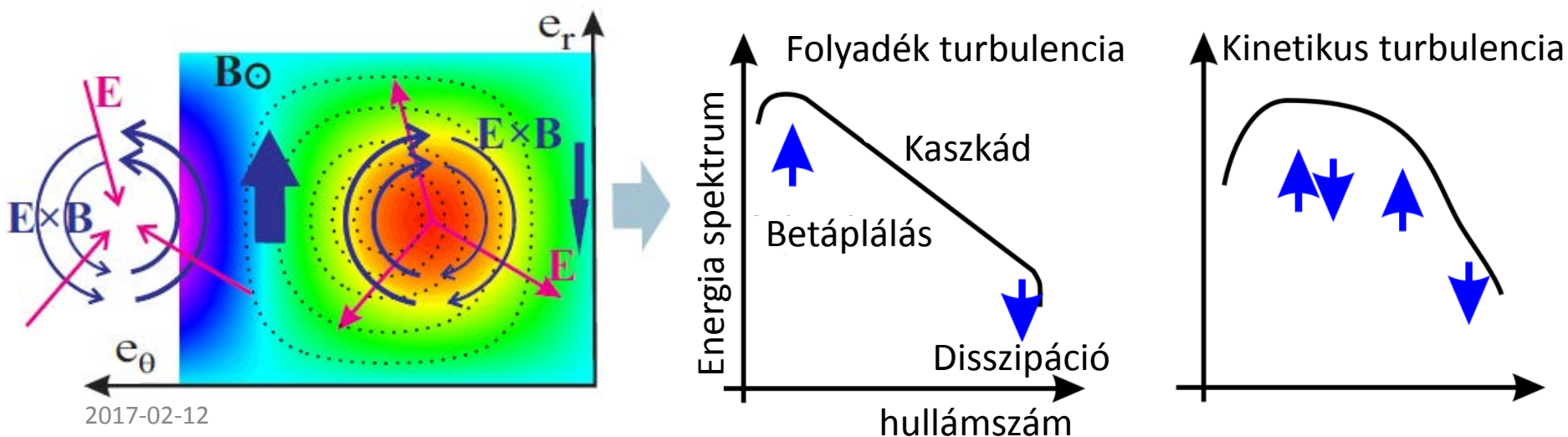
Egyszerűsített modellek

- Nemlineáris girokinetikus szimuláció: pontos eredmény de számításigényes
- Igény van kevésbé pontos, de sokkal gyorsabb modellekre
- Nagy paraméter tér feltérképezése, iteratív megoldások, kísérletek tervezése, valósidejű modellezés



Kvázilineáris modellek

- Kinetikus plazma turbulencia a fázistérben történik. Klasszikus nagy Reynolds számú folyadék turbulenciától eltérően szabad energia betáplálás és kivétel azonos méret-skálákon
- Instabilitások lineáris tulajdonságai nem vesznek el teljesen
- Nemlinearitás szabályozza a fluktuációk amplitúdóját
- Az amplitúdóra lehet becsléseket kapni fizikai megfontolásokból, vagy nemlineáris szimulációkból szerzett tapasztalat alapján
- Gyors lineáris szimulációk használata transzport számításokhoz



Folyadék modellek

- Vesszük a kinetikus egyenlet momentumait:
Csatolt egyenletek (5D $\rightarrow$ 3D)
- **Lezárási probléma**
Minden momentumban új ismeretlen jelenik meg, amit csak a következő egyenletből lehet meghatározni
- Ad-hoc lezárás, vagy illesztés
- Kinetikus effektusokat valamelyest meg kell őrizni (trapped-gyro-Landau-fluid)

$$\int d^3v \, GKE \quad \text{Anyagmegmaradás}$$

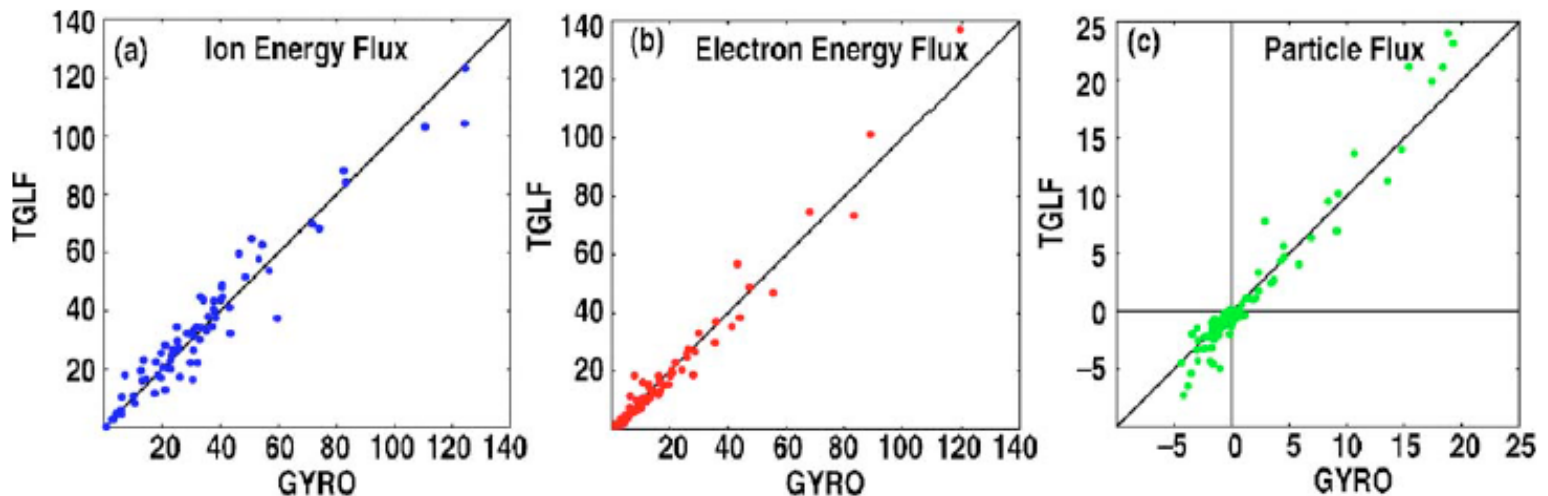
$$\int d^3v m \mathbf{v} \, GKE \quad \text{Impulzus megmaradás}$$

$$\int d^3v \frac{mv^2}{2} \, GKE \quad \text{Energia megmaradás}$$

...

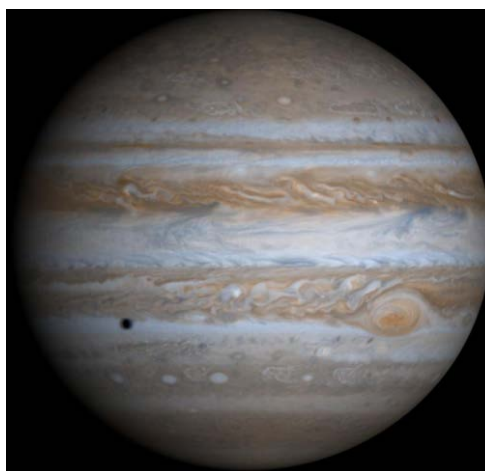
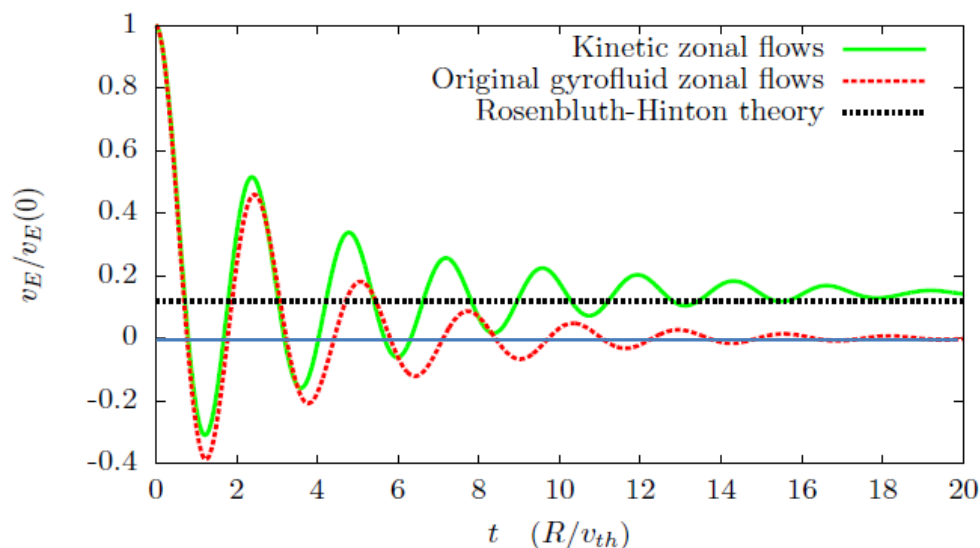
Bonyolultabb momentumok

Végtelen egyenletrendszer, amit le kell zárni



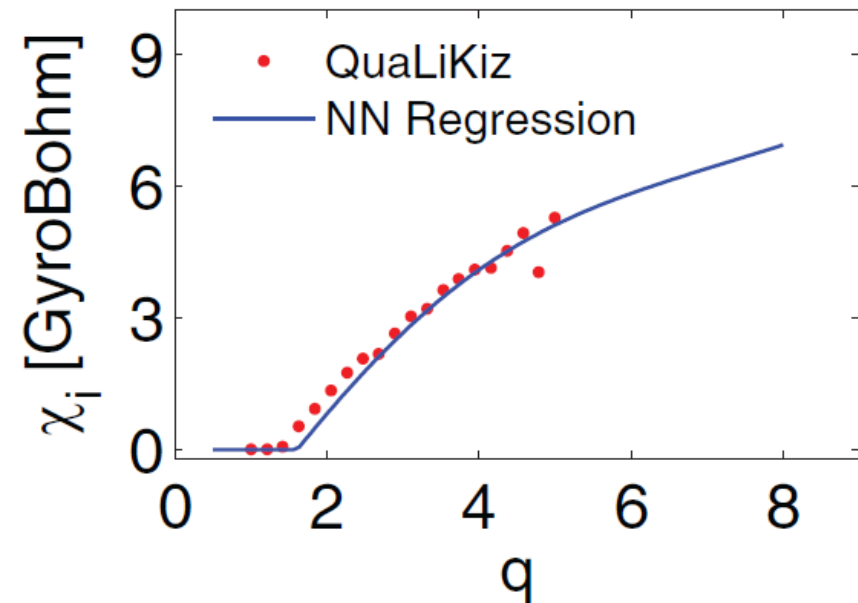
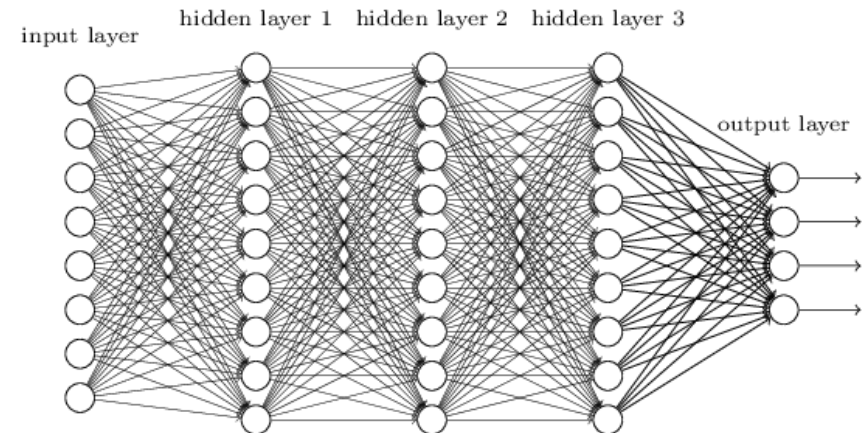
Folyadék-kinetikus hibrid modellek

- Néhány kinetikus effektust nehéz megőrizni folyadék modellekben
- Zonális áramlások reziduális értéke (turbulencia stabilizáló folyamat)
- **Hibrid szimuláció:** nagyrészt folyadék modell, de zonális áramlásokat kinetikusan szimulálja
- GryfX: Kisebb memória igény, GPU-ra adaptálható >1200× gyorsabb, mint nemlineáris GK



Lépések a valós idejű modellezés irányába

- Plazma lövések valós idejűnél gyorsabb analízise biztonsági beavatkozásokhoz
- **Neurális hálózatok**
Kifinomult nemlineáris illesztés
- Tanítani kell egy hatalmas adat halmazon
- Extrapolációra nem alkalmas
- Túl nagy paraméterter, egyelőre csak egyszerűsített modellekkel tanítható
- Hihetetlen gyors:
300s ITER lövés plazma paraméter profiljainak evolúciója egy CPU-n 10s alatt
- Hibák ellen robusztus; néha jobb, mint a model, amivel tanítják
- Hasonló módszerek plazmaszél stabilitás vizsgálatra



Összefoglalás

- A fúziós berendezések tervezéséhez, biztonságos és hatékony üzemeltetéséhez elengedhetetlen egyensúlyi, stabilitási és transzport számításokhoz **numerikus szimulációkra** van szükség.
- A nyers erő módszere nem célravezető. Elméleti megfontolások (pl. girokinetika) segítenek **kezelhető méretűre redukálni** a problémát.
- Transzport szimulációkhoz használhatunk **PIC**, valamint **Euler-típusú modelleket**. Ezek nagyon számításigényesek, de fizikai tartalmukat tekintve a valóságot elegendően megközelíthetik.
- Igény van gyors, egyszerűsített számításokra. A részecskék mozgásából származó **kinetikus effektusok** megőrzésére még a folyadék modellekben is törekedni kell.
- Van remény, hogy a valósídejű modellezés valaha elérhetővé válik.
- A szimulációk néha olyan mikroszkopikus folyamatokra is fényt derítenek, melyeket kísérletben nagyon nehéz vagy lehetetlen közvetlenül megfigyelni. Továbbá olyan szituációkat is modellezhetünk, amelyek kísérletileg nehezen megvalósíthatóak. **Számos elméleti felfedezés és kísérleti előrelépés köszönhető a számítógépes plazmafizikai modellezésnek.**

Multiscale simulation ETG-ITG

- <https://www.youtube.com/watch?v=-TydZ1wDxIY>