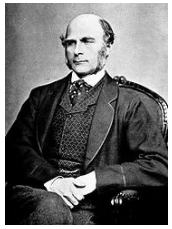
Érdekes dinamikai viselkedés kvantuminformatikai rendszerekben: bolyongás, összefonódás, káosz

Kiss Tamás

MTA Wigner FK

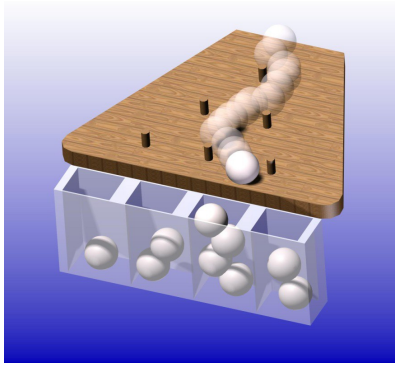
Mafihe Téli Iskola, 2014 február

Véletlen bolyongás

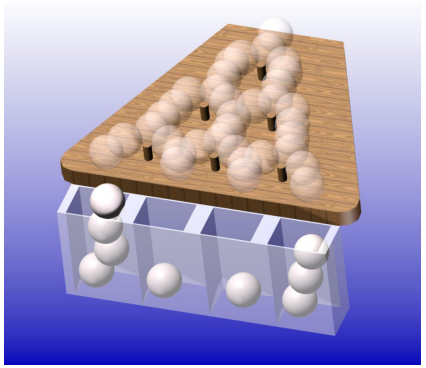


Sir Francis Galton

Galton-deszka

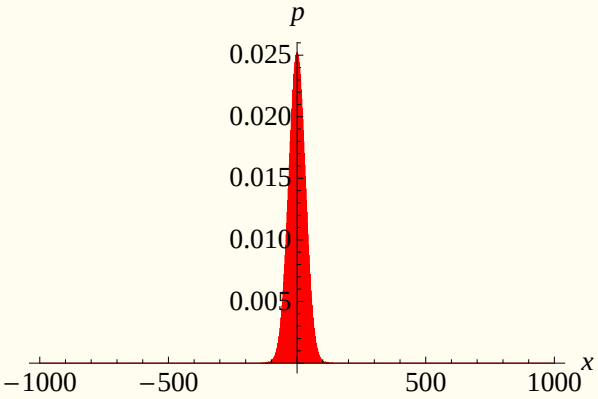


Kvantumos Galton-deszka



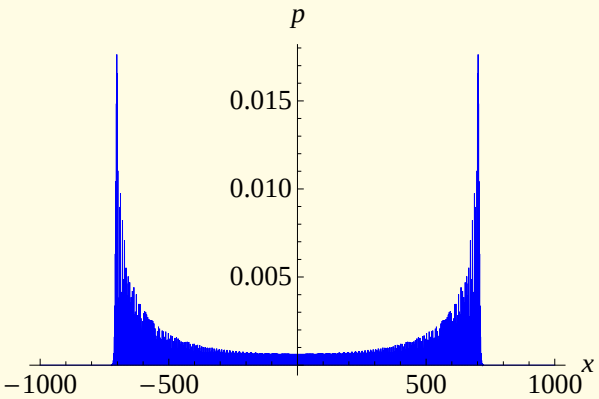
Klasszikus

- Járvány, kockajáték, tőzsde
- Binomiális → Gauss
- Diffúzió, szélesség $\sim \sqrt{t}$



Kvantum

- Érme: extra Hilbert-tér
- Interferencia, szélesség $\sim t$
- Gyorsabb terjedés



Kvantumos bolyongás

Háttér:

- Ötlet: Y. Aharonov, L. Davidovich, N. Zagury, PRA 1993
- Kvantumos sejtautomata: D. Meyer, PLA 1996
  nincs homogén megoldás → érmetér szükséges
- Keresés hiperkockán: N. Shenvi, J. Kempe, K. B. Whaley, PRA 2003
- Algoritmikus alkalmazások
  összefoglaló cikk: M. Santha, arXiv 2008
- Kvantumoptikai elrendezés:
  M. Hillery, J. Bergou, E. Feldman PRA 2003; Bužek, Košik, PRA 2005
- Keresés kvantumoptikai elrendezésben, hibával:
  A. Gábris, T. Kiss, I. Jex, PRA 2007
- Megvalósítás: javaslatok egy sor fizikai rendszerben
  pl.: Kvantum gyűrűk O. Kálmán, T. Kiss, P. Földi, PRB 2009

Diszkrét idejű 1D kvantumos bolyongás

Homogén+unitér: csak triviális megoldás

belső szabadsági fok („érme”)

Pozíció: gráf $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$

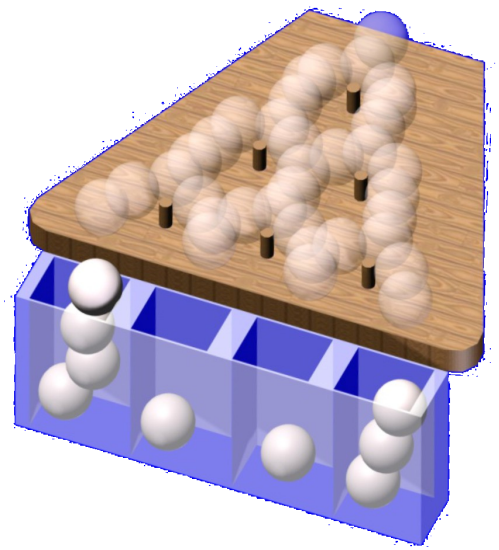
Érme: gráf foka $U = S \cdot (C \otimes I)$

Érmefüggő eltolás Érme operátor

Példa: 1D bolyongás - 1/2 spin

$$|x, \downarrow\rangle \rightarrow |x-1, \downarrow\rangle$$

$$|x, \uparrow\rangle \rightarrow |x+1, \uparrow\rangle$$



Kvantumos bolyongás

Motiváció

- 1D egész rács: aszimptotikus fejlődés — részletesen tárgyalták
- 2D egész rács: egyes esetek: B. Tregenna et al, NJPhysics 2003, N. Inui, Y. Konishi, N. Konno, PRA 2004, Pemantle csoport, arXiv 2008, 2009
  - Grover érme — lokalizáció (csapdázás) az origóban
  - Fourier érme — nincs lokalizáció
- Elérési idő

  Klasszikusan:

  véges egy véges gráfon & a szórással skálázik

  Kvantumosan:
  - Exponenciálisan gyorsabb lehet (Kempe, 2003)
  - Végtelen lehet véges gráfon (Krovi, Brun, 2006)

Kvantumos bolyongás: definíciók

- Pozíció (P) és érme (C, coin)

Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C$

- Diszkrét hely a rácson:

$$\mathcal{H}_P = \ell^2(\mathbb{Z}^d) = \mathrm{Span}\left\{|\mathbf{m}\rangle,\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

- Érmetér — lehetséges lépések: $\{\mathbf{e}_i,\ i = 1, \ldots, c\}$
- Rögzítjük: $c = 2^d$:

$$\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^{2^d} = \mathrm{Span}\left\{|\mathbf{e}_i\rangle,\ \mathbf{e}_i \in \{1, -1\}^d\right\}$$

Egy qubit minden térdimenzióra

- Unitér fejlődés: $U = S \cdot (I_P \otimes C)$

$$|\psi(t)\rangle \equiv \sum_{\mathbf{m},i} \psi_i(\mathbf{m}, t)|\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{e}_i\rangle = U^t|\psi(0)\rangle$$

- Feltételes lépés operátor:

$$S = \sum_i |\mathbf{m} + \mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_i|$$

- Érmedobás operátora

$$C \in U(c)$$

Szimmetrikus érme: $\left|C_{ij}\right| = \frac{1}{\sqrt{c}}$

Kvantumos bolyongás: definíciók

- Pozíció (P) és érme (C, coin)

Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C$

- Diszkrét hely a rácson:

$$\mathcal{H}_P = \ell^2(\mathbb{Z}^d) = \mathrm{Span}\left\{|\mathbf{m}\rangle,\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

- Érmetér — lehetséges lépések: $\{\mathbf{e}_i,\ i = 1, \ldots, c\}$
- Rögzítjük: $c = 2^d$:

$$\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^{2^d} = \mathrm{Span}\left\{|\mathbf{e}_i\rangle,\ \mathbf{e}_i \in \{1, -1\}^d\right\}$$

Egy qubit minden térdimenzióra

- Unitér fejlődés: $U = S \cdot (I_P \otimes C)$

$$|\psi(t)\rangle \equiv \sum_{\mathbf{m},i} \psi_i(\mathbf{m}, t)|\mathbf{m}\rangle \otimes |\mathbf{e}_i\rangle = U^t|\psi(0)\rangle$$

- Feltételes lépés operátor:

$$S = \sum_i |\mathbf{m} + \mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{m}| \otimes |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_i|$$

- Érmedobás operátora

$$C \in U(c)$$

Szimmetrikus érme: $|C_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{c}}$

Klasszikus bolyongás Pólya-féle száma

Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz.

Von

Georg Pólya in Zürich.

1. Ich beziehe den d-dimensionalen Raum auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Ich betrachte diejenigen Punkte, deren Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_d$ sämtlich ganzzahlig sind, und solche Verbindungsgeraden dieser Punkte, die einer der d Koordinatenaxen parallel sind. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet das d-dimensionale *Geradennetz*, und die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die man gewöhnlich als Gitterpunkte bezeichnet, sollen die *Knotenpunkte* des Netzes heißen. In jedem Knotenpunkte kreuzen sich d zueinander rechtwinklige Geraden des Netzes, und

G. Pólya, Mathematische Annalen 84, 149 (1921)

Klasszikus bolyongás Pólya-féle száma

Definíció

- Bolyongás $\mathbb{Z}^d$ rácson, kezdőpont: $\mathbf{0}$
- Pólya-féle szám P: az origóba valaha visszatérés valószínűsége
- Visszatérő ha $P = 1$
- Elszökő ha $P < 1$
- $p_o(t)$ — visszatérés valószínűsége t időpontban

NB: Páratlan t esetén $p_o(t) = 0 \Longrightarrow$ csak páros t-t tekintünk

Univerzális viselkedés

P csak a dimenziótól függ:

$d \leq 2$ visszatérő ($P = 1$)

$d > 2$ elszökő ($P_d = const < 1$)

Diszkrét kvantumos bolyongás Pólya-féle száma

Mérés problémája

Mérés → megváltozik a kvantumállapot

Visszatérési valószínűség — függ a mérés módjától

Helymérés minden lépésben → klasszikus bolyongás

T. Kiss, L. Kecskés, M. Štefaňák, I. Jex, 2009

Javasolt mérési eljárás

- Azonos állapotú sokaság
- Egy méréssorozat: az n-edik rendszert n lépés után mérjük
- Pólya-féle szám:

$$P = 1 - \prod_{t=1}^{+\infty} (1 - p_o(t))$$

- Visszatérés feltétele $\sum_{t=0}^{+\infty} p_o(t) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad p_o(t) \sim \frac{1}{t}$ or slower

M. Štefanak, I. Jex, T. Kiss PRL 100, 020501 (2008)

Fourier analízis

- Eltolási invariancia

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{k},t) \equiv \sum_{\mathbf{m}} \psi(\mathbf{m},t) e^{i(\mathbf{m}\cdot\mathbf{k})}, \quad \mathbf{k} \in (-\pi,\pi]^d$$

Propagátor: $\widetilde{\psi}(\mathbf{k},t) = \widetilde{U}^t \widetilde{\psi}(\mathbf{k},0)$
Propagátor sajátértékei: $\lambda_i = e^{i\omega_i(\mathbf{k})}$

- Kezdetben origóban lokalizált

$$\psi(\mathbf{m},t) = 0 \quad \text{for} \quad \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \widetilde{\psi}(\mathbf{k},0) = \psi(\mathbf{0},0)$$

- Hullámfüggvény az origóban

$$\psi(\mathbf{0},t) = \sum_j \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_d}{2\pi} \quad e^{i\omega_j(\mathbf{k})t} \cdot (\psi(\mathbf{0},0), v_j(\mathbf{k})) \cdot v_j(\mathbf{k}) \right]$$

Aszimptotikus lecsengés vizsgálata

$$\psi(\mathbf{0},t) = \sum_j \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_d}{2\pi} \quad e^{i\omega_j(\mathbf{k})t} \cdot (\psi(\mathbf{0},0), v_j(\mathbf{k})) \cdot v_j(\mathbf{k}) \right]$$

stacionárius fázis közelítés

Stacionárius fázisú pontok $\mathbf{k_0}$: $\nabla\omega(\mathbf{k_0}) = 0$

A pontok degenerációja határozza meg a lecsengés ütemét

A kezdőállapot hatása:

Zéró átfedés egy sajátvektorral:

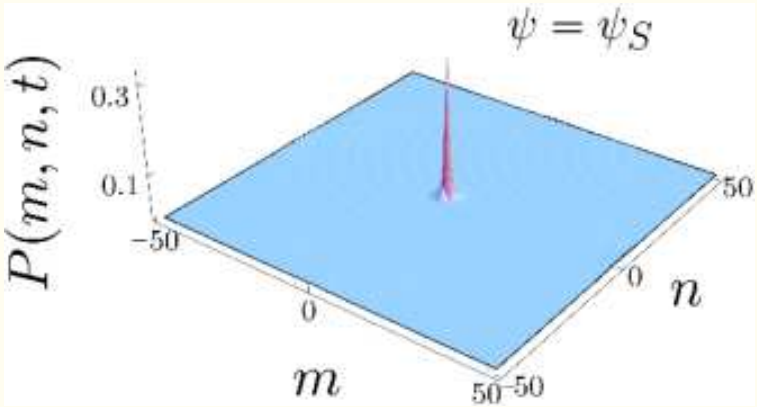
$$(\psi(\mathbf{0},0), v_j(\mathbf{k}_0)) = 0$$

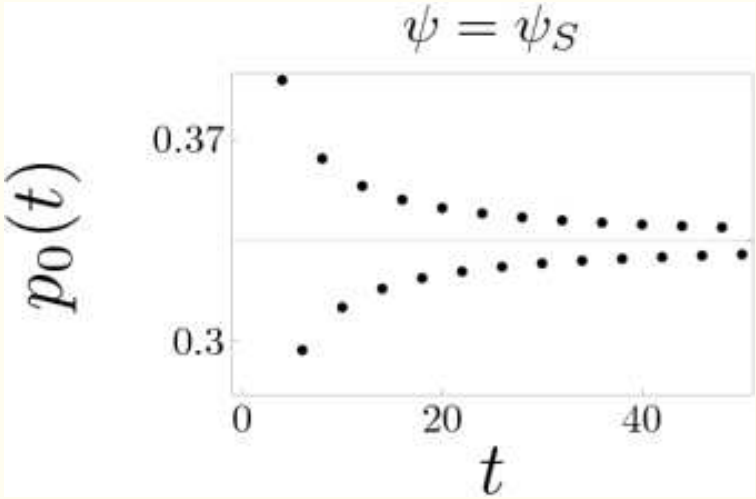
$\Longrightarrow$ a vonatkozó stac. fázisú pont kiesik

$\Longrightarrow$ $p_o(t)$ lecsengése gyorsabb lehet

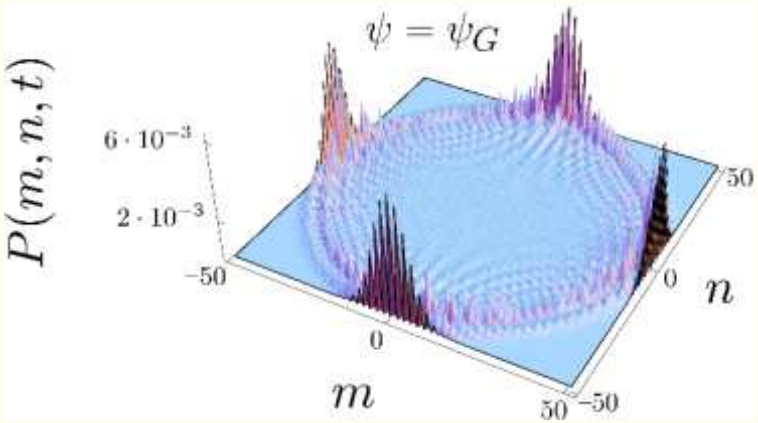
2D bolyongás Grover érmével

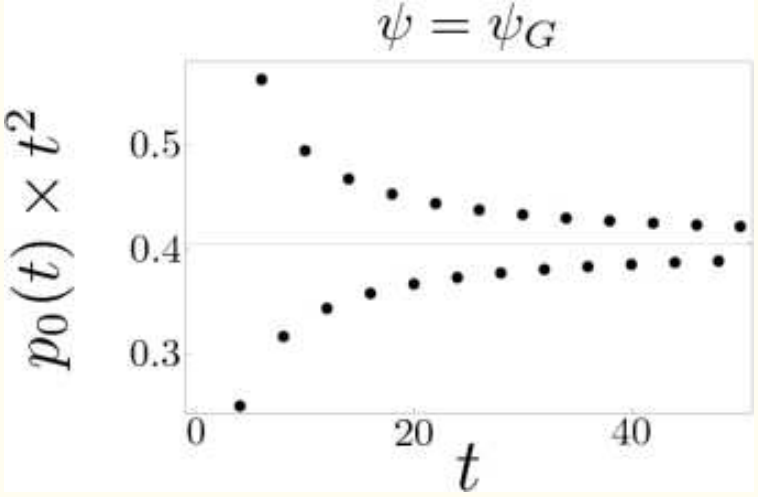
Visszatérő





Elszökő





2D Grover érme

$$G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $G(k_1, k_2)$ sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4}(k_1, k_2) = e^{\pm i\omega(k_1,k_2)}$$

- Lokalizáció (csapdázódás) kivéve egy kezdőállapotot:

$$\psi_G = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T$$

amely ortogonális $v_{1,2}(k_1, k_2)$ sajátvektorokra

Visszatérés tetszőleges dimenzióban

Páros: $2d$ dim

- d Grover érme tenzorszorzata

$$C^{(2d)} = G \otimes \ldots \otimes G$$

- 2^{2d-1} konstans sajátérték $\lambda_i = \pm 1$
  $\Longrightarrow$ localizáció
  $\Longrightarrow$ visszatérés
- Kivéve egy 4^{d-1} dim alterét a kezdőállapotoknak:

$$\psi_n = \psi_{1\ldots 2n} \otimes \psi_G \otimes \psi_{2n+3\ldots 2d}$$

Páratlan: $2d+1$ dim

- Tetszőleges 1D érme az extra dimenzióban ($C \in U(2)$):

$$C^{(2d+1)} = C^{(2d)} \otimes C$$

- 2^{2d} speciális sajátérték
- $p_o(t) \sim \frac{1}{t}$
  $\Longrightarrow$ visszatérés
  $\Longrightarrow$ de nincs lokalizáció
- Kivéve egy $2 \cdot 4^{d-1}$ dim alterét a kezdőállapotoknak:

$$\psi_n = \psi_{1\ldots 2n} \otimes \psi_G \otimes \psi_{2n+3\ldots 2d+1}$$

Szimmetrikus esetek $\mathbb{Z}^d$ rácson

Eset	$p_o(t)$	**Pólya szám**	**Klasszikus**
1-D	t^{-1} tetszőleges ψ_0	1	1
d-D független	t^{-d} tetszőleges ψ_0	< 1 $(d > 1)$	< 1 $(d > 2)$
2-D Grover	const. ha $\psi_0 \neq \psi_G$ t^{-2} ha $\psi_0 = \psi_G$	1 < 1	1
d-D Grover-alapú $(d > 2)$	*ptlan D:* const. *páros D:* t^{-1} if $\psi_0 \notin \{\psi_G\}$ t^{-2} if $\psi_0 \in \{\psi_G\}$	1 < 1	< 1
2-D Fourier	t^{-1} ha $\psi_0 \notin \{\psi_F\}$ t^{-2} ha $\psi_0 \in \{\psi_F\}$	1 < 1	1

Összefoglalás

- Dimenzió és kezdőállapot szerepe: visszatérő lehet tetszőleges dimenzióban
- 2D: elszökő/visszatérő/lokalizáló bolyongások — érme és kezdőállapot-függő
- Folytonos idejű bolyongás: csak a rácstól (gráftól) függ
  Z. Darázs, T. Kiss, PRA 81, 062319 (2010)

Áttekintő cikkek:

N. Konno: Quantum walks,
U. Franz and M. Schurmann (Eds): Quantum Potential Theory, Lect. Notes in Math., Vol. 1954, Springer, pp.309-452 (2008).

S. E. Venegas-Andraca: Quantum walks: a comprehensive review,

Quantum Information Processing 11 (5), pp.1015-1106 (2012)

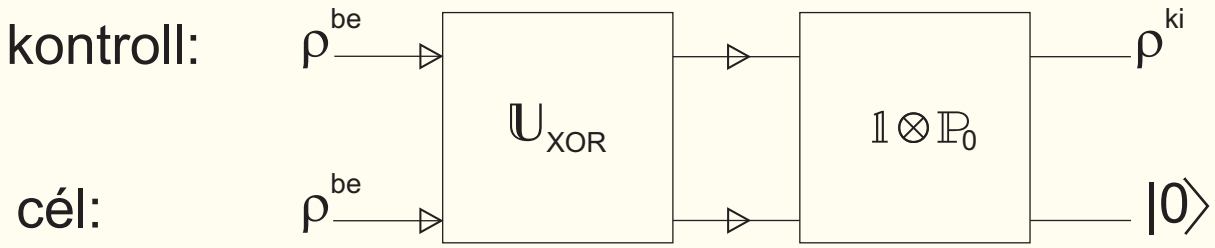
Káosz és kvantummechanika

Unitér fejlődésnél nincs káosz a kvantummechanikában

- Kvantumkáosz: egy klasszikusan kaotikus rendszer kvantumos verziója
  - Tipikus jegyek
  - De: nincs exponenciális érzékenység
- Kvantum → klasszikus: Hogyan keletkezik a káosz?
  - A környezet hatására nem-unitér fejlődés [R. Schack *et al.* J. Phys. A 1995, G.G. Carlo *et al.* PRL 2005]
  - Modellezhetjük pl. folytonos méréssel [T. Bhattacharya *et al.* PRL 2000; A.J. Scott and G.J. Milburn PRA 2001]
- Mérés – információ – visszacsatolás

Nemlinearitás mérés és kiválasztás által

Elemenkénti négyzetreemelés



2. ábra. Az $\mathcal{S}$ transzformáció lépései. Két másolata ugyanazon qubitállapotnak először egy unitér kapun megy keresztül (egyéb kapukat is választhatunk, mint az $\mathbb{U}_{XOR}$), majd egy szűrőn. A szűrő kapu tartalmazza a mérést. A kontroll bit $\rho^{be}_{kontroll}$ a folyamat végén az új $\rho^{ki}_{kontroll}$ állapotban lesz, míg a cél bit mindig a $|0\rangle$ állapotban.

$\rho_{ij} \xrightarrow{\mathcal{S}} N\rho_{ij}^2$, Bázisfüggő fogalom!

H. Bechmann-Pasquinucci *et al.* PRA 1998; D.R. Terno PRA 1999;
G. Alber *et al.* J. Phys. A 2001; P. Horodecki PRA 2003

Nemlinearitás: 1 qubit

1. Kezdőállapot — két identikus rendszer:

$$|\psi_{12}\rangle = (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\otimes(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle) = \alpha^2|00\rangle+\alpha\beta|01\rangle+\beta\alpha|10\rangle+\beta^2|11\rangle$$

2. Unitér transzformáció:

$$U_{XOR} = U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{12}\rangle' = U_{XOR}|\psi_{12}\rangle = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \beta\alpha|11\rangle + \beta^2|10\rangle$$

3. Mérés a második qubit 0 állapotban:

$$\mathbb{1}\otimes\mathbb{P}_0|\psi_{12}\rangle' = |0\rangle_{22}\langle 0|\psi_{12}\rangle' = (\alpha^2|0\rangle_1 + \beta^2|1\rangle_1)|0\rangle_2$$

Determinisztikus a szelekció miatt

Nemlinearitás mérés és kiválasztás által

Általában

1. $\rho^{in} \otimes \rho^{in}$ kell!
2. D dim GXOR (unitér):

$$\mathbf{U}_{GXOR}|i\rangle_1|j\rangle_2 = |i\rangle_1|i \ominus j\rangle$$

$$i \ominus j := i - j \,\mathrm{modulo}(D)$$

3. Mérés: $|0\rangle$-ban

Működik:

- D dimenzióra
- összetett rendszerekre

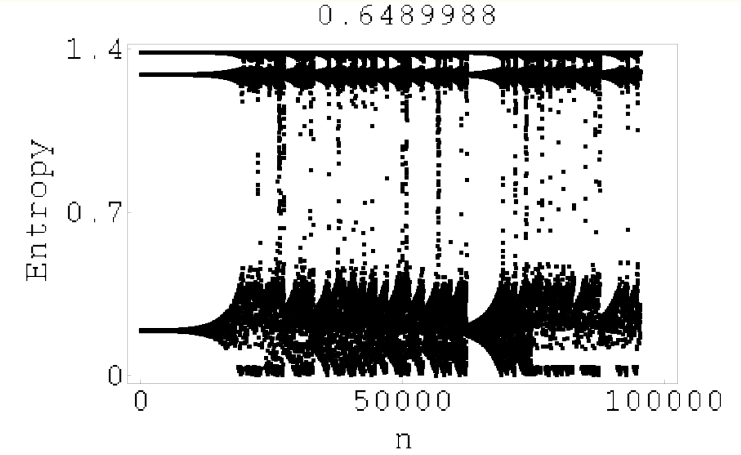
$\Rightarrow$ összefonódás-tisztítás

Iterált dinamika

1. $\mathcal{S}: \quad \rho_{ij} \xrightarrow{\mathcal{S}} N\rho_{ij}^2$
2. $\mathcal{R}: \quad \mathcal{R}\rho = U\rho U^\dagger$

$$U = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \; e^{i\phi} \\ -\sin x \; e^{-i\phi} & \cos x \end{pmatrix}$$

Egy lépés: $\rho' = \mathcal{F}\rho = \mathcal{R}\mathcal{S}\rho$



Valódi káosz?

Ljapunov exponens: általában numerikusan nehéz számolni

Legegyszerűbb eset: 1 qubit tiszta állapotban

$$|\varphi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle \to |\varphi'\rangle = c_1'|0\rangle + c_2'|1\rangle$$

Normálás + globális fázis → elég 1 komplex amplitúdó

$$|\varphi\rangle = N(z)(z|0\rangle + |1\rangle) \to |\varphi'\rangle = N(z')(z'|0\rangle + |1\rangle)$$

Norma: $N(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$

Leképezés $\mathbb{C}$ fölött

$\mathcal{F}$-t egy $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezés, F_p, reprezentálja:

$$z \mapsto F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^* z^2} \qquad p = \tan x \, e^{i\phi}$$

$p \in \mathbb{C}$ az unitér forgatás paramétere

Komplex racionális leképezések

Legyenek S és S' Riemann felületek, S' kompakt. Legyen F holomorf leképezések egy családja $f_\alpha : S \to S'$. Azt mondjuk F normális, ha minden végtelen sorozat F-ből tartalmaz egy részsorozatot, amely lokálisan egyenletesen tart egy határfüggvényhez.

S legyen egy Riemann felület, $f : S \to S$ egy nem konstans holomorf leképezés, $f^{\circ n} : S \to S$ pedig n-szeres iteráltja. Rögzítsük a $z_0 \in S$ pontot, ekkor vagy

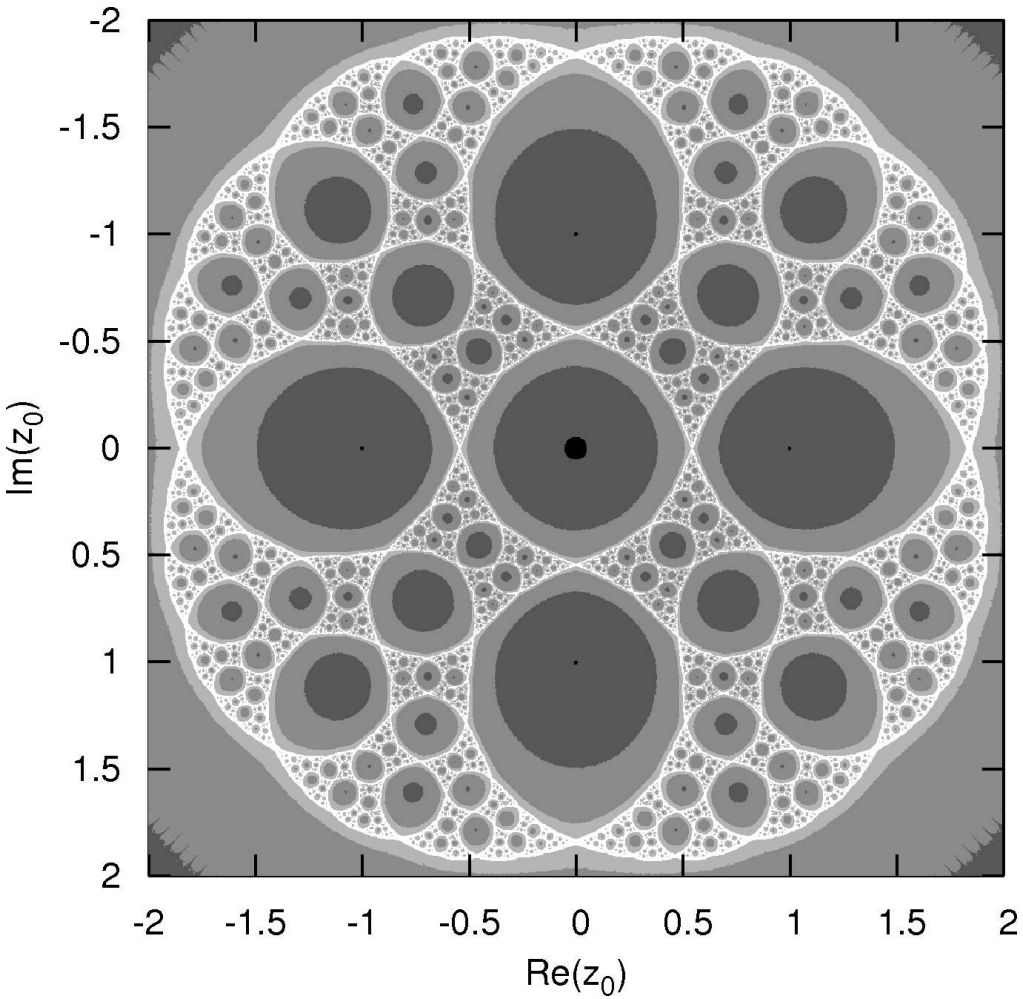
1. $\exists$ egy U környezete z_0-nak úgy, hogy $\{f^{\circ n}\}|U$ egy normális családot alkot $\Rightarrow$ z_0 egy normális pont és z_0 a Fatou halmazba tartozik
2. nincs ilyen környezet $\Rightarrow$ z_0 a Julia halmazba tartozik $J = J(f)$

J zárt halmaz, $F = S \setminus J$ nyílt halmaz.

J.W. Milnor *Dynamics in One Complex Variable*, (Vieweg, 2000)

Nemtriviális Julia halmaz, $p = 1$

Egy vonzó periodikus ciklus: $\{-1, \infty\}$



Sötét - gyors, Szürke - lassú, Fehér - nincs konvergencia

Valódi káosz bizonyítása

Tétel a racionális függvényekről

Ha $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ egy másod, vagy magasabb fokú racionális függvény, akkor a $J(f)$ Julia halmaz nem üres.

Milnor, Chapter 4.

Másodfokú racionális függvény

$$z \mapsto F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^* z^2}\,, \qquad p = \tan x\, e^{i\phi}$$

A Riemann-gömbön:

$\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}\,,\ \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty\,,\ z \in \{0, \infty\} \leftrightarrow \{|1\rangle, |0\rangle\}$

A triviális eset: nincs forgatás

Négyzetre emelő leképezés

$$z \mapsto F_p(z) = \frac{z^2 + p}{1 - p^* z^2}, \qquad p = \tan x \, e^{i\phi} = 0$$

$$\boxed{z \mapsto F_0(z) = z^2}$$

Viselkedése

$|z| < 1$ $F^{\circ n}(z) \to 0$

$|z| > 1$ $F^{\circ n}(z) \to \infty$ Két stabil fixpont: $\{0, \infty\}$

$|z| = 1$ nem konvergál

Triviális Julia halmaz: az egységkör

Ljapunov exponens a körön

A Ljapunov exponens definíciója

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \lim_{\Delta_z(0)\to 0} \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta_z(n)}{\Delta_z(0)} .$$

A távolság az átfedésből:

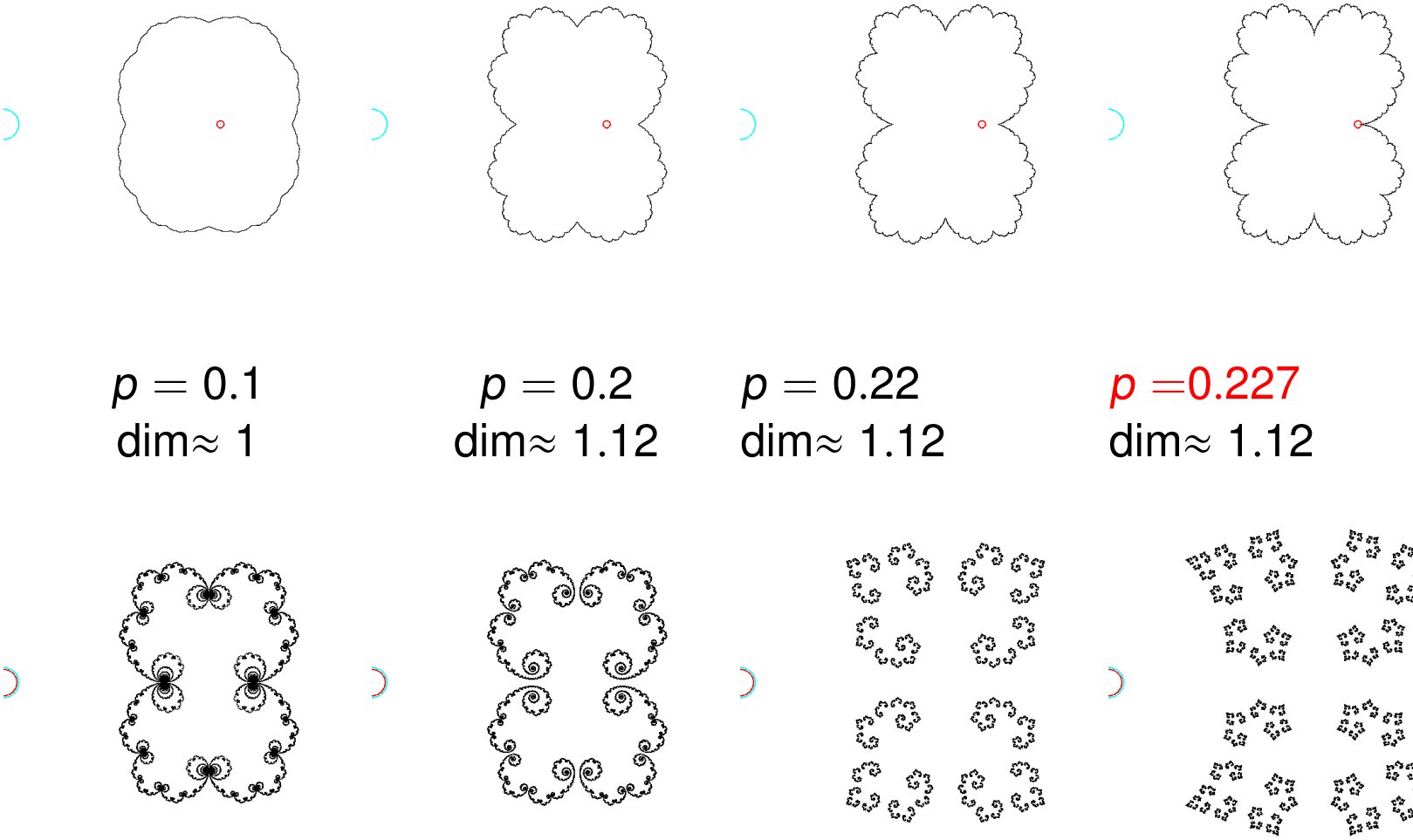
$$\Delta_z(0) = 1 - |\langle z_1 | z_0 \rangle|^2$$

Nem mindig egyértelmű.

- Az egységkörön: $z_0 = 1, z_1 = \exp(i\varphi)$
- Távolság: $\Delta_z(n) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2^n \varphi)$
- A Ljapunov exponens pozitív:

$$\boxed{\lambda_\phi = 2 \ln 2}$$

Folytonos átalakulás és határpontjai: $p \in \mathbb{R}$



$p = 0.1$
dim$\approx$ 1

$p = 0.2$
dim$\approx$ 1.12

$p = 0.22$
dim$\approx$ 1.12

$p = 0.227$
dim$\approx$ 1.12

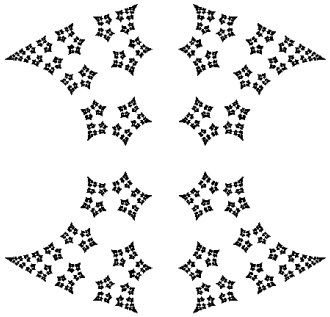
$p = 0.228$
dim$\approx$ 1.5

$p = 0.25$
dim$\approx$ 1.43

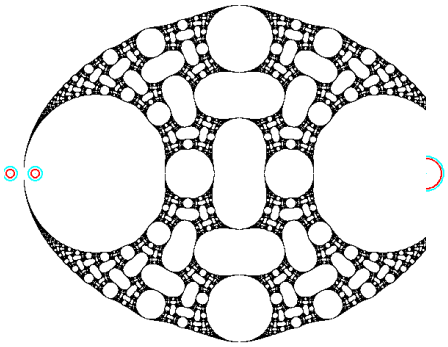
$p = 0.4$
dim$\approx$ 1.37

$p = 0.5$
dim$\approx$ 1.38

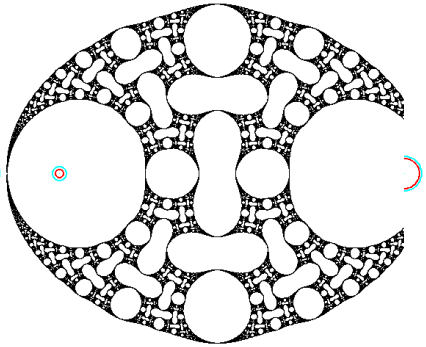
Folytonos átalakulás és határpontjai: $p \in \mathbb{R}$



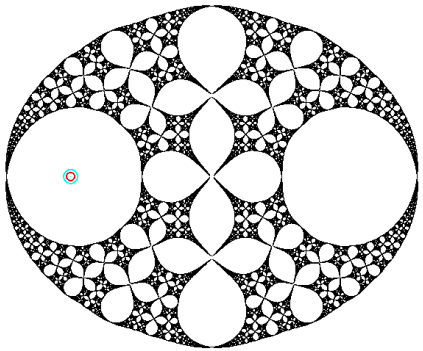
$p = 0.6$
dim$\approx$ 1.45



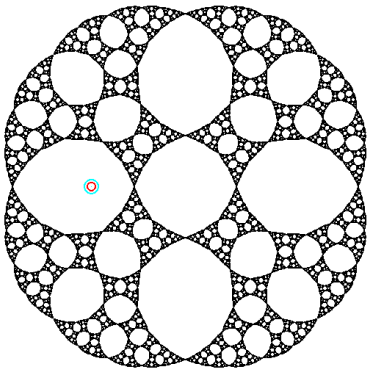
$p =$0.682
dim$\approx$ 1.52



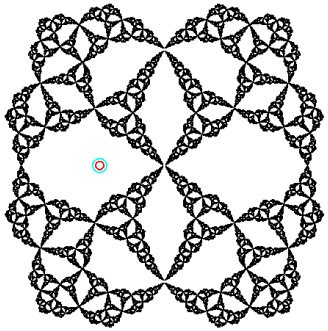
$p = 0.71$
dim$\approx$ 1.55



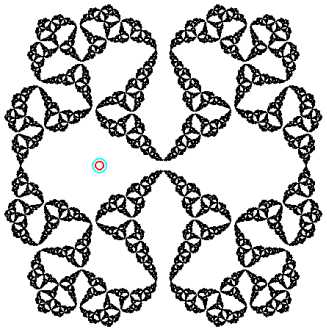
$p =$0.741
dim$\approx$ 1.58



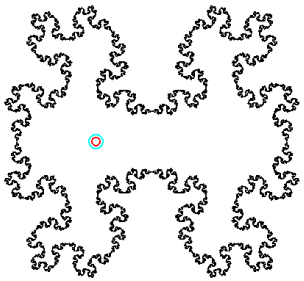
$p = 1$
dim$\approx$ 1.57



$p =$1.521
dim$\approx$ 1.64



$p = 1.53$
dim$\approx$ 1.63



$p = 1.8$
dim$\approx$ 1.41

Hogyan bánjunk a komplex káosszal?

- Periodikus ciklusok: $f^{\circ n}(z_1) = z_1$
- Számoljunk multiplikátort: $\lambda = (f^{\circ n})'(z_1)$

$|\lambda| < 1$ vonzó
$|\lambda| > 1$ taszító
$|\lambda| = 1$ semleges
$\lambda = +1$ de $f^{\circ n} \neq \mathbf{1}$: parabolikus

Fatou halmazban: vonzó ciklusok & és a vonzás körzete Ω
Julia halmazban: taszító ciklusok & a lezárás $\partial\Omega$

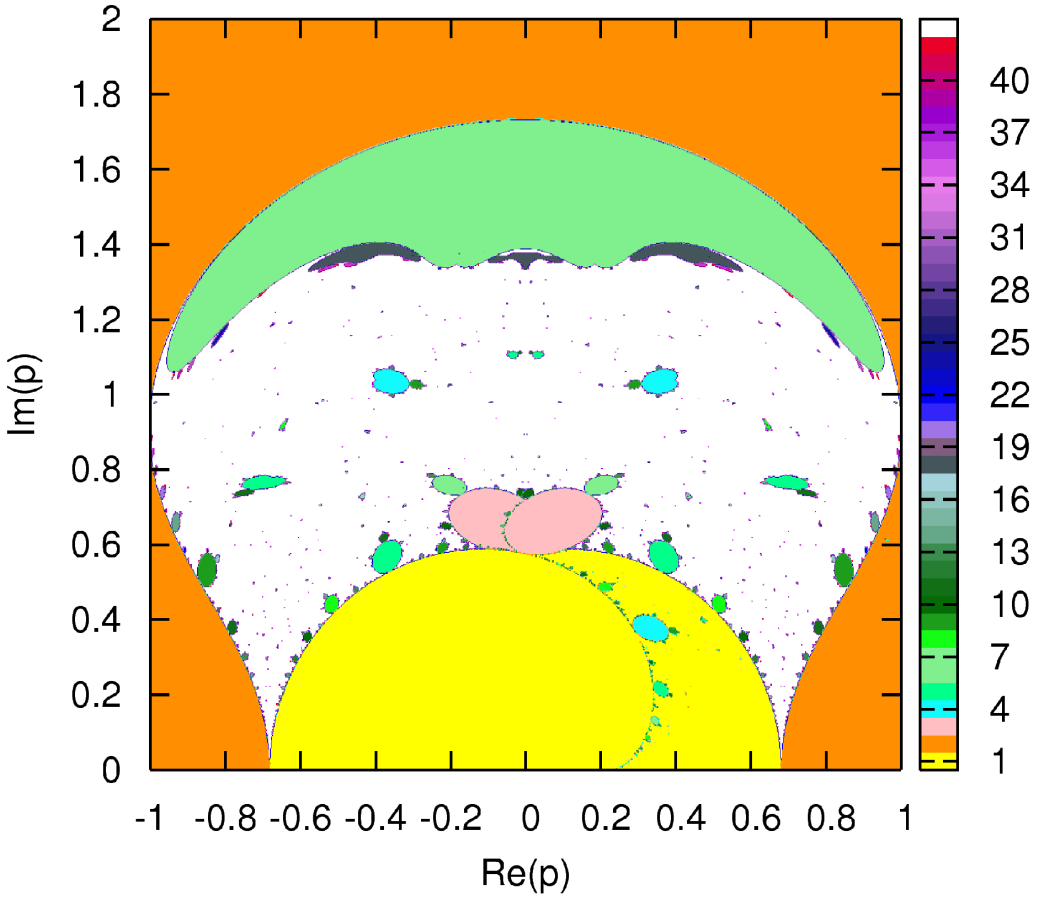
- Keressük meg a kritikus pontokat: $f'(z_{\text{crit}}) = 0$

Lemma 1: Egy $d \geqslant 2$-ed fokú racionális leképezésnek max. $2d - 2$ ciklusa, amely vonzó/parabolikus.
Lemma 2: A kritikus pontok pályája vonzó vagy parabolikus ciklushoz tart, vagy sehova.

- Kövessük a kritikus pontok pályáját: konvergálnak-e.

T. Kiss, I. Jex, G. Alber, and S. Vymětal: Phys. Rev. A **74**, 040301R (2006)

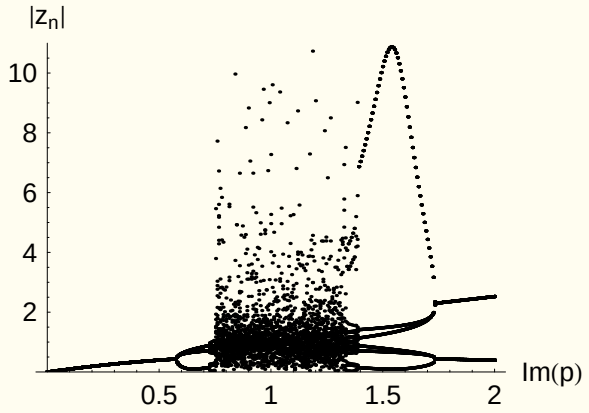
Vonzó periodikus ciklusok hossza, $z_0 = 0$



Tulajdonságok

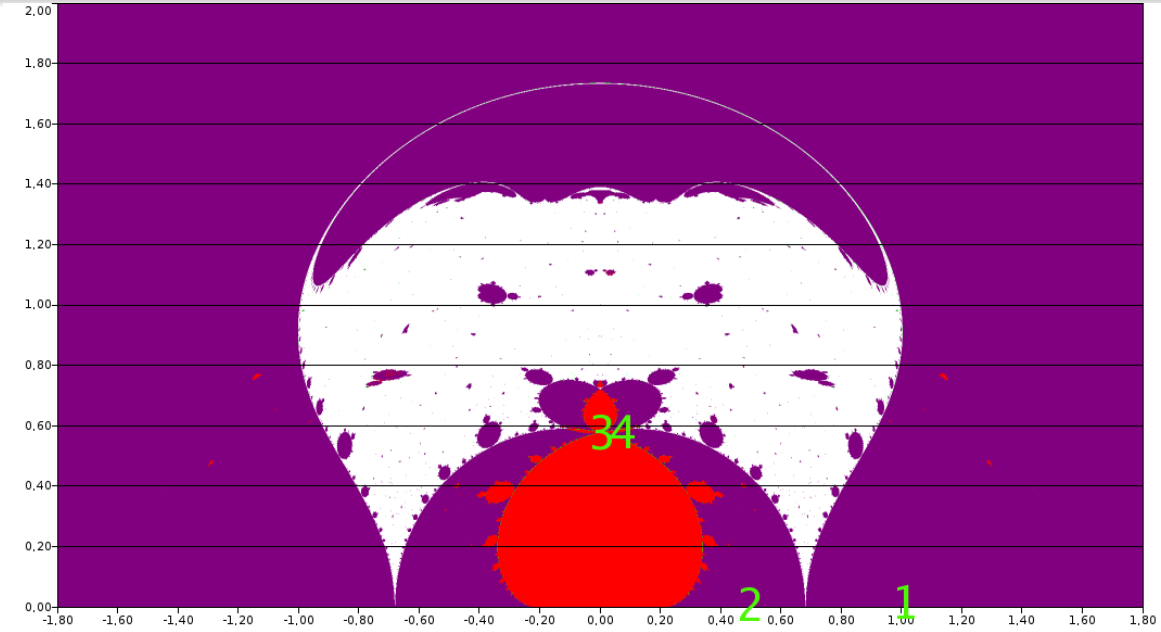
- Tükörszimmetria a *Re* tengelyre
- Szimmetria *Im*-re, ha $z_0 \leftrightarrow z_\infty$

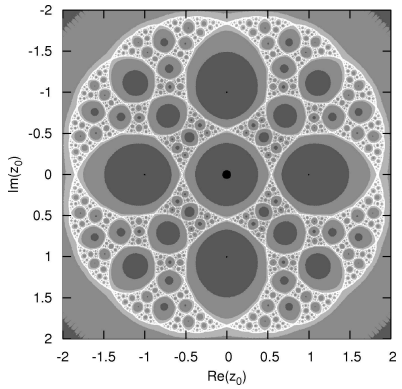
Imaginárius *p*

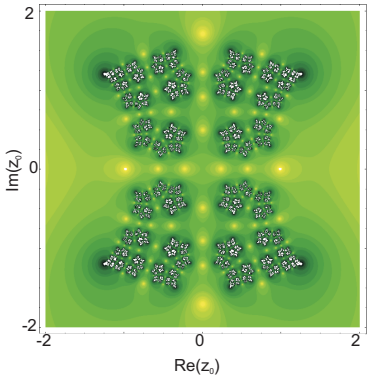


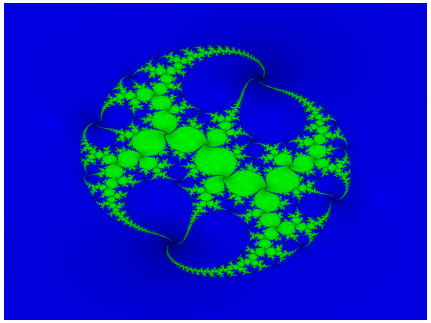
Sárga - 1 elemű vonzó ciklus, Narancs - 2 elemű, . . . , Fehér - káosz

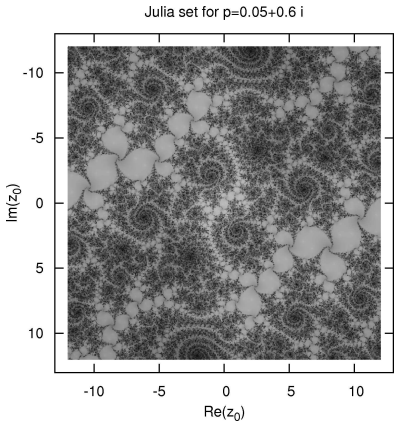
Julia halmazok és a paramétertér











T. Kiss, I. Jex, G. Alber, E. Kollár, Int. J. Quant. Inf. (2008)

Mennyire általánosak a leképezéseink dinamikailag?

Dinamikailag ekvivalens leképezések:

Möbius konjugáció: $f \sim m^{-1} \circ f \circ m$, $m : z \to \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$;
Esetünkben $\leftrightarrow$ Hilbert tér-beli bázis áttérés

Kvadratikus racionális leképezések teljes invariánsai

Ekvivalenciaosztályok M_2:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}; \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 : \frac{\alpha \cdot z^2 + \beta}{\gamma \cdot z^2 + \delta} \Rightarrow A = \frac{\alpha\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, B = \frac{\alpha^3\beta + \gamma\delta^3}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$

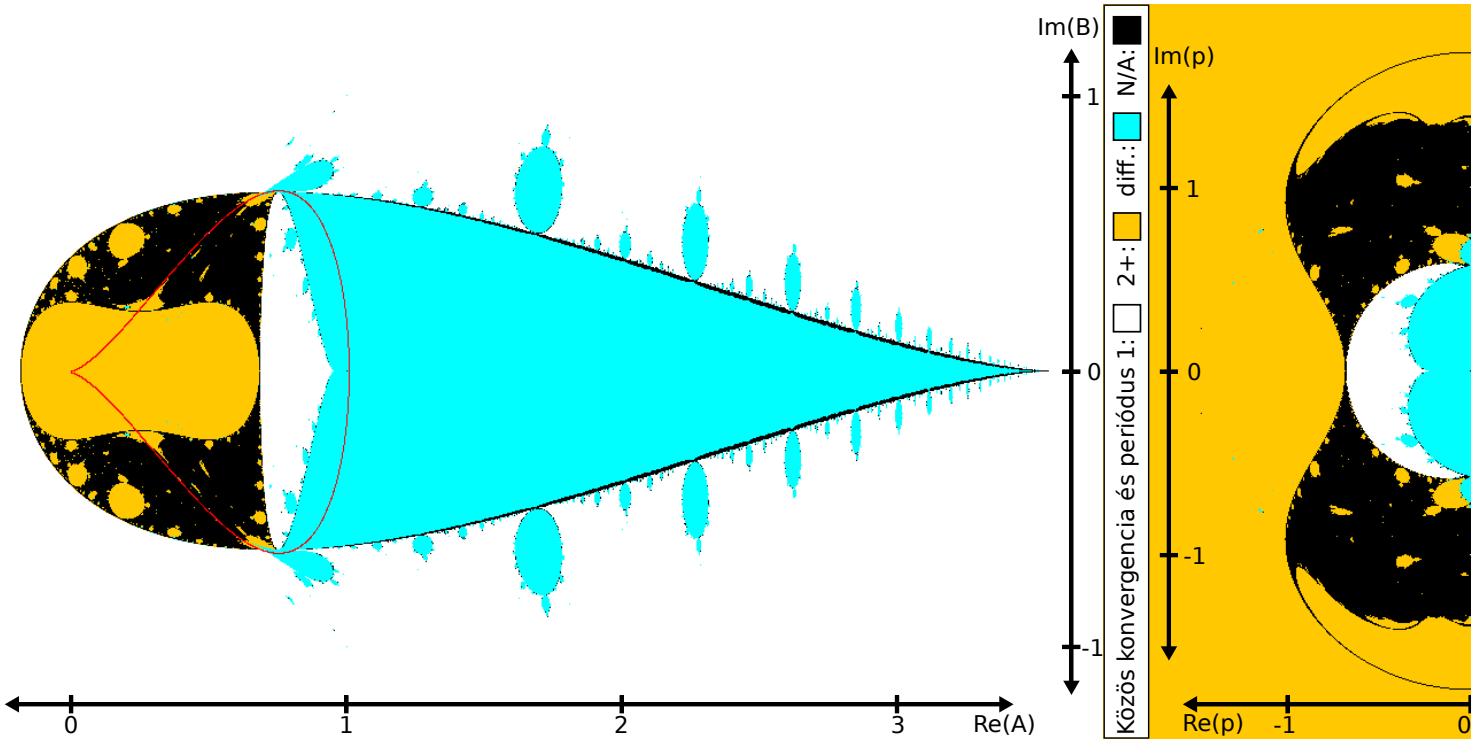
Kritikus pont: $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0$, ezen normálformában mindig
$z = 0, \infty (\leftrightarrow |0\rangle, |1\rangle)$

A mi leképezésünk

$$f_p : A_p = \frac{1}{1 + |p|^2}, B_p = \frac{2i \cdot Im(p)}{(1 + |p|^2)^2}$$

$Re(p) \leq 0$ redundancia mentes!

Milyen M_2-beli dinamikát tudunk megvalósítani?



$Re(A), Im(B)$ szelet

p tér

CNOT helyett más kapu: további A, B régiók

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x \longrightarrow |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes U(a, b, c, d)$$

Milyen p-k esetén van pozitív Ljapunov exponens?

Diszkrét idejű Ljapunov exponens

Egy z pontban: $\lambda_z = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln\left(\left|f'(z)\right| \cdot \left|f'(f(z))\right| \cdot \ldots \cdot \left|f'\left(f^{\circ(n-1)}(z)\right)\right|\right)$

Jó definíció: $\lambda_J = \inf_{z\in J} \lambda_z$ — J: Julia halmaz

Hiperbolikus leképezés

$\left|df(z)\right| \rho(f(z)) > |dz| \rho(z)$ — $|dz|$: gömbi , ρ : Riemann metrika

$\Longleftrightarrow$ f mindkét kritikus p. egy-egy vonzó periodikus orbithoz tart!

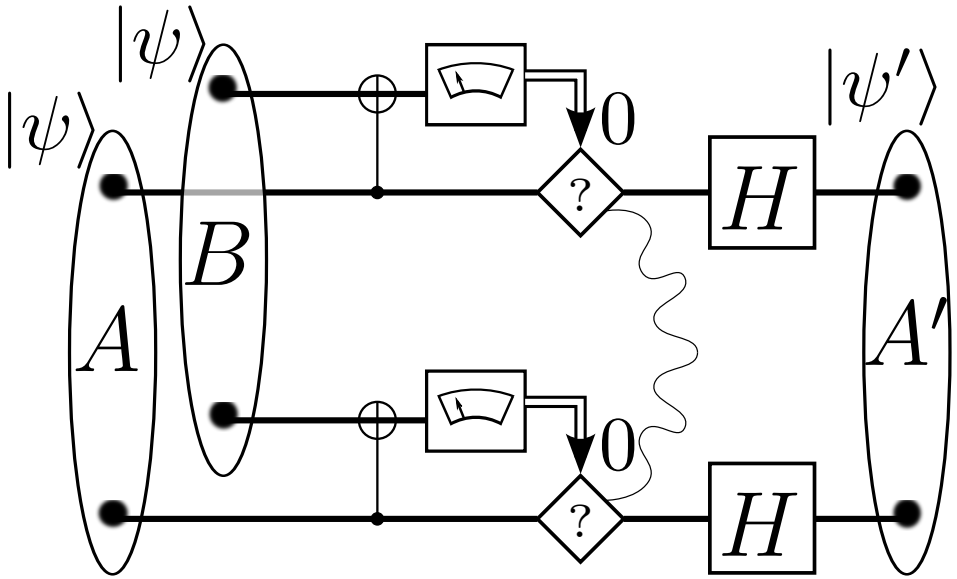
Tétel: *f hiperbolikus $\Leftrightarrow$ λ pozitív a Julia halmazon* $(\lambda_J > 0)$

$p = \pm i$

Lattès leképezés: tórusz nyújtva forgatásával konjugált

$$\boxed{J = \hat{\mathbb{C}}}$$

2 qubites séma



$$|\psi\rangle = c_1|00\rangle + c_2|01\rangle + c_3|10\rangle + c_4|11\rangle$$

$$|\psi'\rangle = U_H \otimes U_H \left[\mathcal{N}(c_1^2|00\rangle + c_2^2|01\rangle + c_3^2|10\rangle + c_4^2|11\rangle)\right]$$

Példa: instabilitás az összefonódottság tisztításában

Célállapot

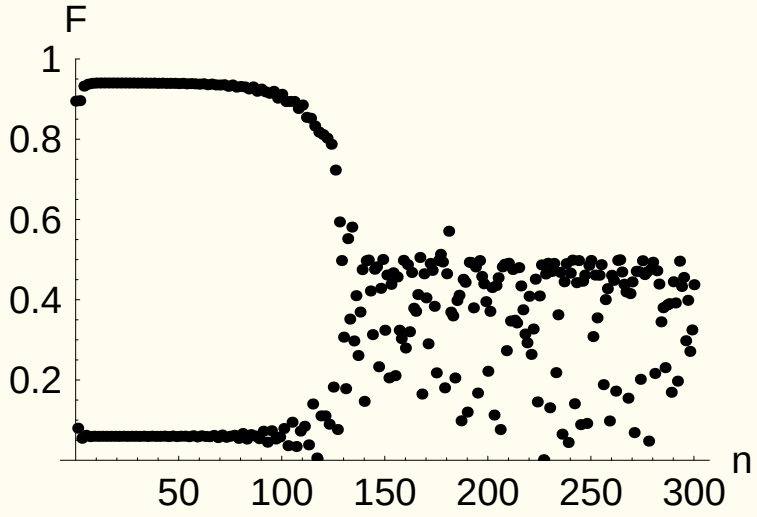
$$|\psi_{target}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

Egy 2 hosszú stabil ciklus része unitér paraméterek: $x_i, \phi_i = \pi/4$

Kezdőállapot

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0.445 & 0 \\ 0 & 0.445 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Metastabil oszcillációk



Fidelity:

$$F = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\rho}\rho_{target}\sqrt{\rho}}\right)$$

2 qubit: leképezés keresése

Kezdőállapot:

$$|\psi_{12}(r)\rangle = \mathcal{N}(|00\rangle + r|11\rangle)$$

Egy iteráció:

$$|\psi(r)^{(1)}\rangle = \mathcal{N}\left(|00\rangle + |11\rangle + f(r)(|01\rangle + |10\rangle)\right)$$

Trick

Két iteráció:

$$|\psi(r)^{(2)}\rangle = \mathcal{N}(g(r))\left(|00\rangle + g(r)|11\rangle\right)$$

$$g(r) = f(f(r)) = f^{\circ 2}(r)$$

$$f(r) = (1 - r^2)/(1 + r^2)$$

Csak 1 komplex változó!

2 qubit: kaotikus összefonódás.

Aszimptotikus állapotok

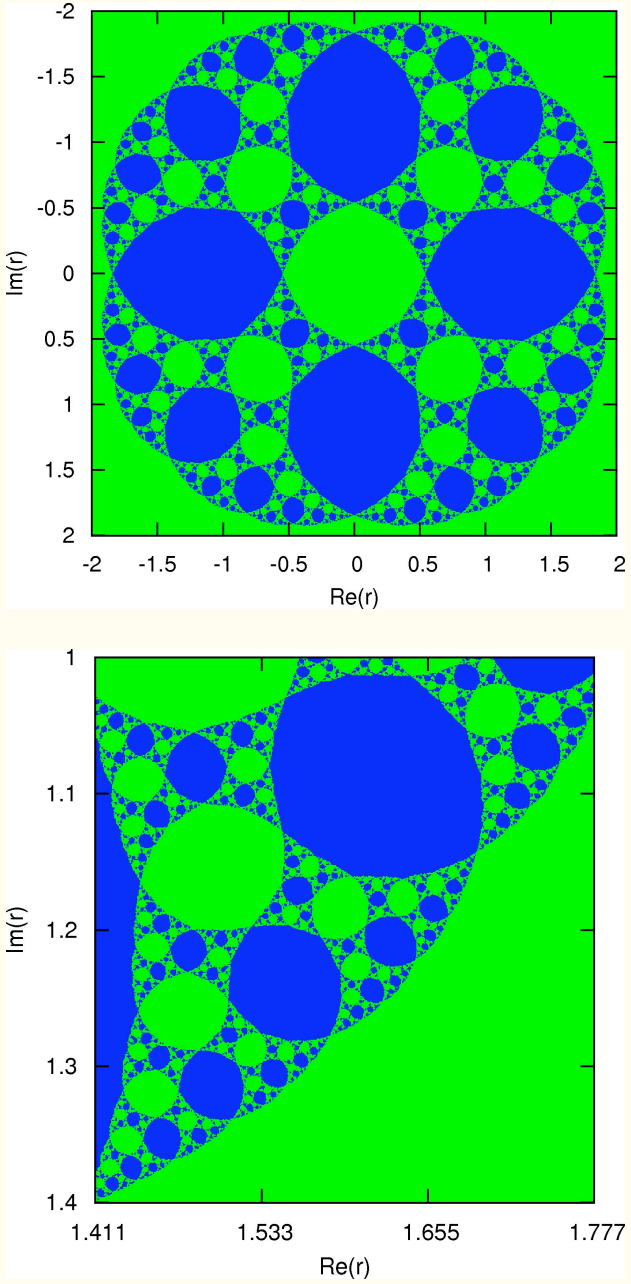
Zöld: : Teljesen összefonódott

$$|\psi^{(\infty)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

Kék: Szeparálható, oszcilláló

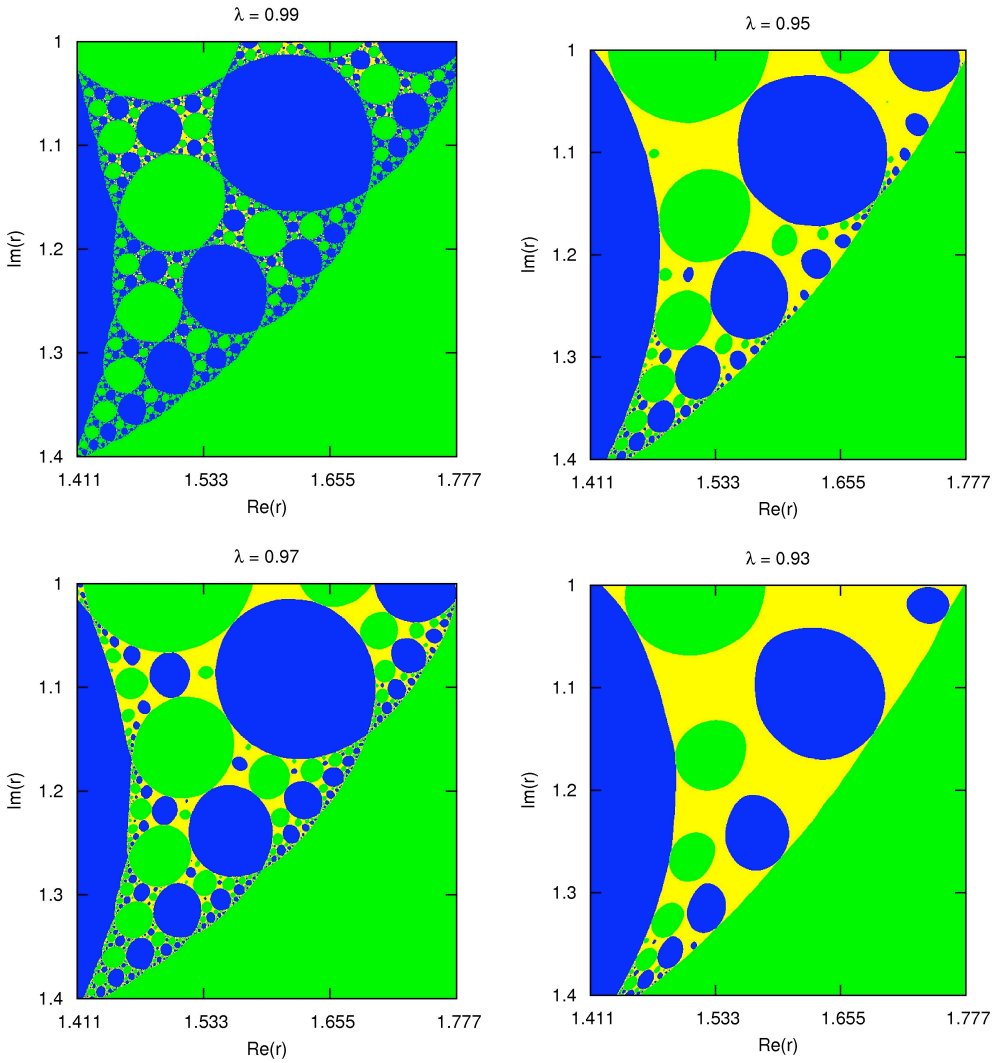
$$|\psi^{(\infty)}\rangle \to \left\{|00\rangle\,,\ \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right\}$$

T. Kiss, S. Vymětal, L. D. Tóth, A. Gábris, I. Jex, G. Alber PRL **107**, 100501 (2011)



Zajos kezdőállapot

$$\rho_0(\lambda, r) = \lambda\ |\psi_{12}(r)\rangle\langle\psi_{12}(r)| + (1-\lambda)/4\ \mathbb{1}$$



Sárga: szeparálható kevert állapotok

További stabil ciklusok

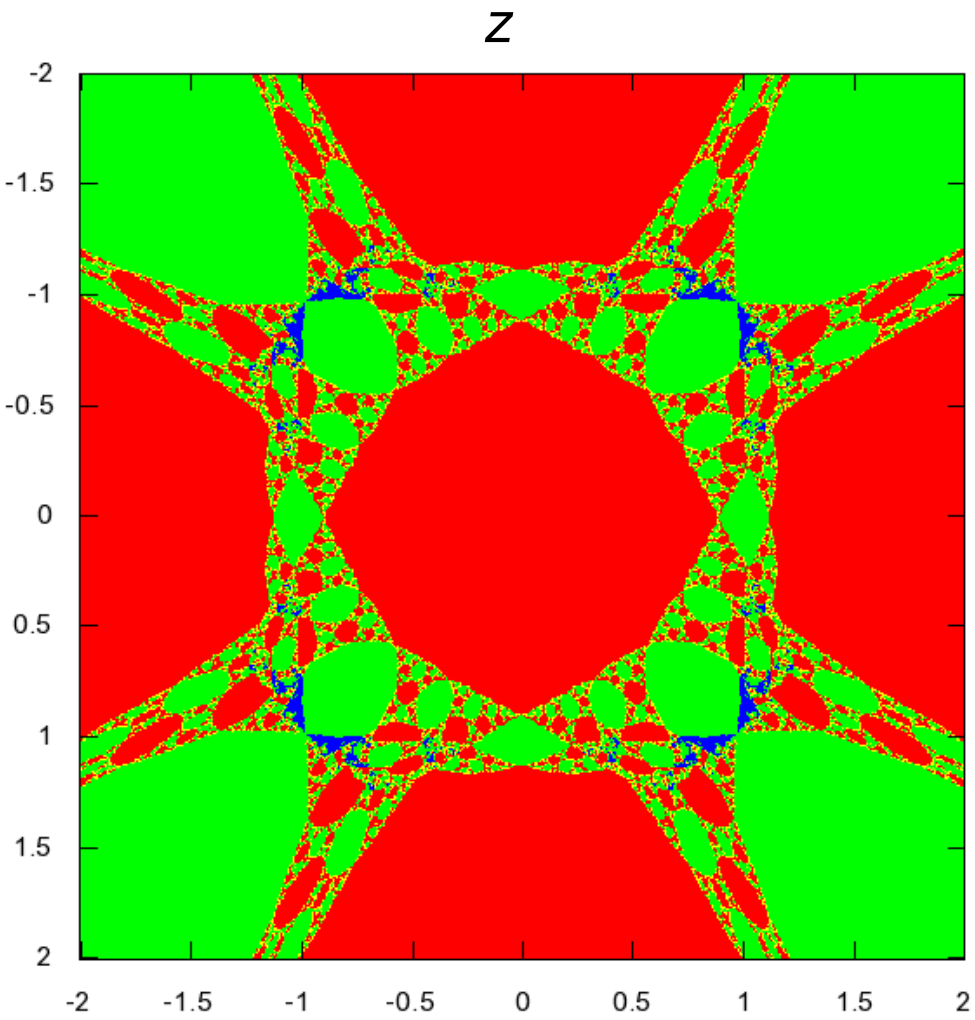
Kezdőállapot: $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{N(z)}(|01\rangle + z|10\rangle)$

Aszimptotikus állapotok

Zöld: Teljesen összefonódott
$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Kék: Szeparálható
$\{|00\rangle,$
$\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\}$

Piros: Szeparálható
$\{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (0\rangle + |1\rangle),$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\}$



Történeti megjegyzések

- Káosz a fizikában - Poincaréig nyúlik vissza
  [H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste* (Gauthier-Villars, Paris, 1892)]
- Egy évszázada beszélnek komplex káoszról - a matematikában:

  1906 Ekkor adta az első különös példát P. Fatou:
  $z \mapsto z^2/(z^2+2)$
  [P. Fatou, *Sur les solutions uniformes de certaines equations fonctionnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris 143 (1906) 546-548]

  1920-as évek G. Julia, S. Lattés, J. F. Ritt

  1970-es évek Számítógépek - képek: Mandelbrot & ...
- Más fizikai rendszerek megvalósítanak komplex káoszt?

Összefoglalás

- Egy qubit:
  - gazdag kvantumrendszer!
  - komplex káosz
  - klasszikus megfelelő nélkül
- Két qubit:
  kaotikusan fejlődő összefonódottság
- Hosszútávú viselkedés
  csak elméletileg:
  exponenciálisan nagy sokaság szükséges

Összefonódás-tisztítás, állapotok megkülönböztetése
Fundamentális kérdések