A Zitterbewegung

általános elmélete

Grafén Téli Iskola
2011. 02. 04.

Dávid Gyula
ELTE TTK
Atomfizikai
Tanszék

A Zitterbewegung általános elmélete

1. **Mi a Zitterbewegung?**
2. **Kvantumdinamika Heisenberg-képben**
3. **A Schrödinger-féle Zitterbewegung** (1930)
4. **Zitterbewegung a nanofizikában**
   kétszintű rendszerek (2006)
5. **Zitterbewegung revisited**
   többszintű kvázi-szabad rendszerek (2008)
6. **Példák** (2006-2009)
   Zitterbewegung különböző nanofizikai modellrendszerekben
7. **A Zitterbewegung (meta)fizikája** (2010)
   a/ Feketeleves: az észlelhetetlen ZB
   b/ A ZB-tartóshullám
   c/ Fejéről a talpára: az oszcillációktól Newton I. törvényéig
   d/ ZB és a Berry-konnexió: egy nem-abeli mértéktranszformáció
   e/ Nemkvantumos ZB: pontszerű relativisztikus pörgettyű
   f/ Nemkvantumos ZB: anizotróp kristályokban terjedő hanghullámok
      móduskeveredése
8. **Összefoglalás** (2010)

Mi az a Zitterbewegung?

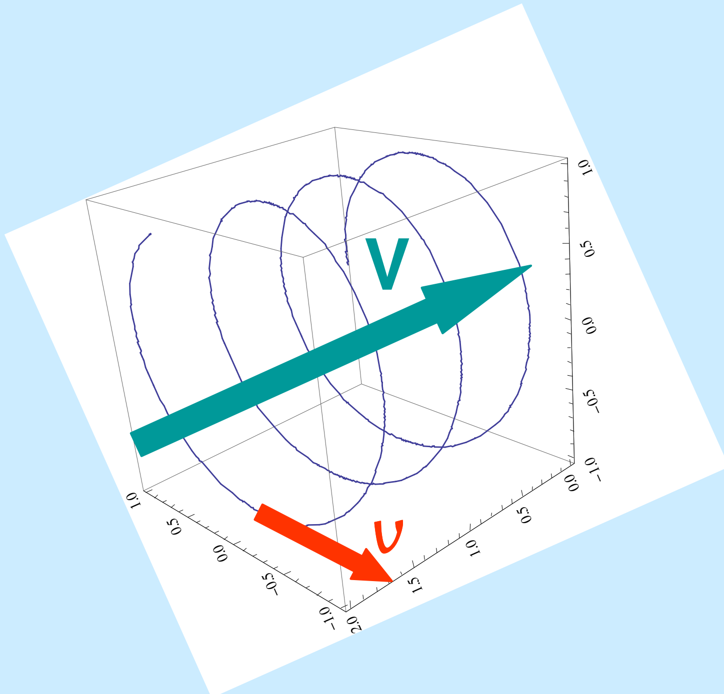
homogén tartományban
külső erőhatás nélkül mozgó
SZABAD részecskék
periodikus,
„reszkető” (németül: **Zitter-**)
mozgása (németül: **Bewegung**)

a citera
mint hangszer

Miért érdekes és meglepő ez?

Szabad részecskék: természetes várakozás:
egyenes vonalú egyenletes mozgás,
állandó **V** sebesség

Ehelyett a megoldás:
állandó **V** átlagos sebesség +
+ periodikus „Zitterbewegung”
az átlagos mozgás körül



Kérdések:
- mi a Zitterbewegung oka?
- milyen rendszerekben lép fel a „citerázás”?
- hogy lehet részletesen leírni a mozgást?

Kvantummechanika (QM) Heisenberg-képben

A kvantumrendszerek
Schrödinger-féle leírása:

$$|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$$

hullámfüggvény vagy állapotvektor

Hilbert-tér

időfejlődés:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle$$

normálás

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1 = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$\hat{U}(t)^{-1} = \hat{U}(-t) = \hat{U}^{+}(t)$$

unitaritás

az időfejlődés csoport-tulajdonsága

$$\hat{U}(t_2)\,\hat{U}(t_1) = \hat{U}(t_2 + t_1)$$

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

$$\hat{H}^{+} = \hat{H}$$

a hullámfüggvényre vonatkozó Schrödinger-egyenlet:

$$i\,\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

az időfejlesztés
hermitikus generátora:

a Hamilton-operátor

Várható érték:

A fizikai mennyiség

$\hat{A}$ hermitikus operátor $\quad \hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$\bar{A}(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$$

Eml: $\quad |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi_0\rangle$

$\langle \psi(t)| = \langle \psi_0 | \hat{U}^+(t)$

Heisenberg trükkje:

$$\bar{A}(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | \underbrace{\hat{U}^+(t) \hat{A} \hat{U}(t)} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{A}(t) | \psi_0 \rangle$$

mozog — Hogyan ?

áll

áll

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^+(t) \hat{A} \hat{U}(t)$$

mozog — Hogyan ?

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Schrödinger-egyenlet a Sch-képben

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}(t)]$$

Heisenberg-egyenlet a H-képben

Ehrenfest tétele:

Eml 1: $H(x\,,\,p) \Longrightarrow \hat{H}(\hat{x}\,,\,\hat{p})$

Eml 2: $[\hat{p}_k\,,\,\hat{x}_l] = \frac{\hbar}{i}\delta_{kl}\,\hat{\mathbb{I}}$

Heisenberg felcserélési relációja

Eml 3: $[\hat{p}_k\,,\,\hat{A}(\hat{x}\,,\,\hat{p})] = \frac{\hbar}{i}\widehat{\frac{\partial A}{\partial x_k}}$ $\quad [\hat{x}_k\,,\,\hat{A}(\hat{x}\,,\,\hat{p})] = -\frac{\hbar}{i}\widehat{\frac{\partial A}{\partial p_k}}$

$$\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\,,\,\hat{A}]$$

ez AZONOS a klasszikus Poisson-zárójeles mozgásegyenlettel

speciálisan:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\,,\,\hat{x}_k] = \widehat{\frac{\partial H}{\partial p_k}} \qquad \frac{d}{dt}\hat{p}_k = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\,,\,\hat{p}_k] = -\widehat{\frac{\partial H}{\partial x_k}}$$

Heisenberg QM-mozgásegyenletei Hamilton klasszikus mozgásegyenleteivel

$\hat{x}_k(t)$ $\quad \hat{p}_k(t)$ AZONOSAK $x_k(t)$ $\quad p_k(t)$

Heisenberg QM-mozgásegyenletei $\hat{x}_k(t)$ $\hat{p}_k(t)$ AZONOSAK Hamilton klasszikus mozgásegyenleteivel $x_k(t)$ $p_k(t)$

⇒ a QM-mozgásegyenletek megoldásai megegyeznek a klasszikusakkal!

ismert klasszikus függvények $x_k(t)$ $p_k(t)$ magkaphatjuk $\hat{x}_k(t)$ $\hat{p}_k(t)$ ⇒

$$\hat{A}(t) = A(\hat{x}_k , \hat{p}_k)$$

minden fizikai mennyiségre

a QM várható értékek így kaphatók meg:

$$\bar{A}(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{A}\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\,\hat{A}(t)\,|\psi_0\rangle$$

tehát elég tudni a klasszikus mechanikát és megoldásait… ☺

Mi a Zitterbewegung alapfeltétele?

A QM-ben a CM-nél bonyolultabb Hamilton-operátorok is fellépnek:

ezek **TÖBB KOMPONENSŰ** hullámfüggvényekre hatnak:

$$|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^n$$

ahol $\mathcal{H}_0$ egy “hagyományos” Hilbert-tér, pl. $\mathcal{L}^2$

és $\mathbb{C}^n$ az n komponensű komplex vektorok tere

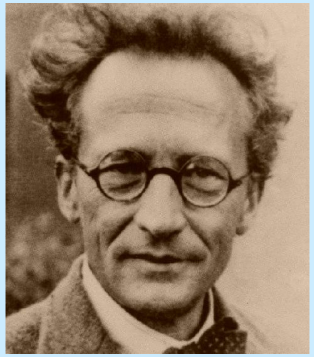
$\otimes$ a tenzorszorzás jele

A hullámfüggvény ekkor oszlopvektor,

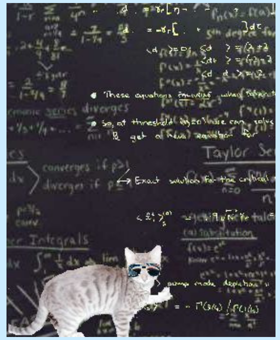
benne $\mathcal{H}_0$ elemei:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ \vdots \\ |\psi_n\rangle \end{pmatrix}$$

A Schrödinger-féle Zitterbewegung



Erwin
Schrödinger
(1887 – 1961)



Schrödinger naív kérdése (1930):

Hogyan mozog a relativisztikus **SZABAD** elektron?

(külső erőhatás nélkül)

A természetes(nek tűnő) válasz:
egyenes vonalú mozgás
állandó sebességgel

Meglepetés: a Dirac-egyenlet szerint a mozgás sokkal bonyolultabb!

A trükk: számítsuk ki az $\hat{\mathbf{x}}(t)$ operátort Heisenberg-képben!

A Dirac-egyenlet Hamilton-operátora:

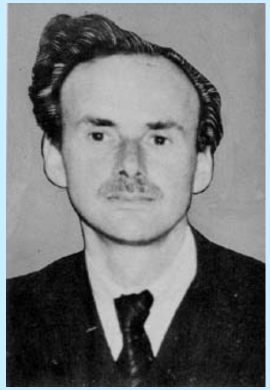
$$\boxed{\hat{H}_D = c\,\boldsymbol{\alpha}\,\hat{\mathbf{p}} + \beta\, m\, c^2}$$

A sebesség operátora

$$\hat{\mathbf{v}} = c\,\boldsymbol{\alpha}$$

Schrödinger lineáris differenciálegyenletet írt fel a sebességoperátorra:

$$\frac{d}{dt}\hat{v}_k = \left(-\hat{v}_k + \hat{V}_k\right)\frac{2\,i}{\hbar}\,\hat{H}_D$$



Paul Dirac
(1902 – 1984)

A Schrödinger-féle Zitterbewegung

Ennek megoldása a sebesség időfüggő operátora:

$$\hat{v}_k(t) = \hat{V}_k + (\hat{v}_k(0) - \hat{V}_k)\, e^{-i\hat{\Omega}t}$$

ahol $\hat{\Omega} = \frac{2}{\hbar}\hat{H}_D$ és $\hat{V}_k = c\,\hat{p}_k\,\hat{H}_D^{-1}$ a részecske klasszikus relativisztikus sebessége

Egy újabb integrálás megadja a helyvektor időfüggő operátorát is:

$$\boxed{\hat{x}_k(t) = \underbrace{\hat{x}_k(0) + \hat{V}_k\, t}_{} + \underbrace{(\hat{v}_k(0) - \hat{V}_k)\,(e^{-i\hat{\Omega}t} - 1)\, i\,\hat{\Omega}^{-1}}_{}}$$

klasszikus mozgás

állandó $\hat{\mathbf{V}}$ sebességgel

Zitterbewegung

az $\hat{\mathbf{x}}(t)$ operátor gyors oszcillációja

+ a rezgés középpontjának fix eltolódása

Lehet-e észlelni és mérni a Zitterbewegungot?

$$\boxed{\hat{x}_k(t) = \hat{x}_k(0) + \hat{V}_k\, t + \left(\hat{v}_k(0) - \hat{V}_k\right)\left(e^{-i\hat{\Omega}t} - 1\right) i\,\hat{\Omega}^{-1}}$$

Becsüljük meg a Zitterbewegung frekvenciáját:

$$\overline{\Omega} = \frac{2}{\hbar}\,\overline{\hat{H}_D} \qquad \overline{\hat{H}_D} \sim m\,c^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{\Omega} \sim \frac{2\,m\,c^2}{\hbar}$$

$$m\,c^2 \sim 0.5\,MeV \qquad \hbar \sim 10^{-34}\,J \quad \Rightarrow \quad \overline{\Omega} \sim 10^{21}\,Hz$$

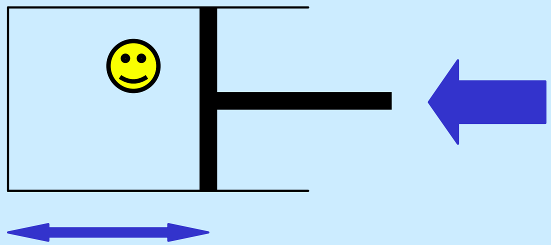
Becsüljük meg a Zitterbewegung amplitudóját:

$$A \sim \frac{V}{\Omega} \sim \frac{c}{\Omega} = \frac{\hbar}{m\,c} = \lambda_C \sim 2 \cdot 10^{-13}\,m \sim 1\,atom\,/\,500$$

Compton-hullámhossz

A Compton-hullámhossz „népszerű” jelentése

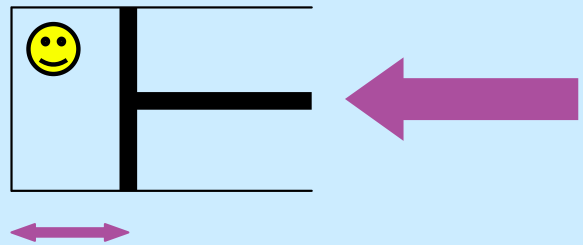
elektron egy
dugattyús hengerben



$$\Delta x$$

legyen: $$\Delta x \sim \lambda_C = \frac{\hbar}{m\,c}$$

HOL VAN
az
elektron?



$$\lambda_C$$

Heisenberg
határozatlansági relációja:

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}$$

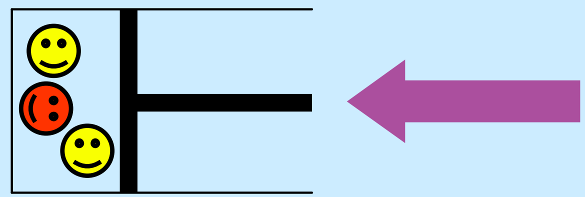
a befektetendő energia:

$$\Delta E \sim \frac{(\Delta p)^2}{2\,m} \sim \frac{\hbar^2}{m\,(\Delta x)^2}$$

$$\Delta E \sim \frac{\hbar^2}{m\,(\frac{\hbar}{m\,c})^2} \sim m\,c^2$$

párkeltés:
elektron-pozitron pár

MELYIK
elektron?



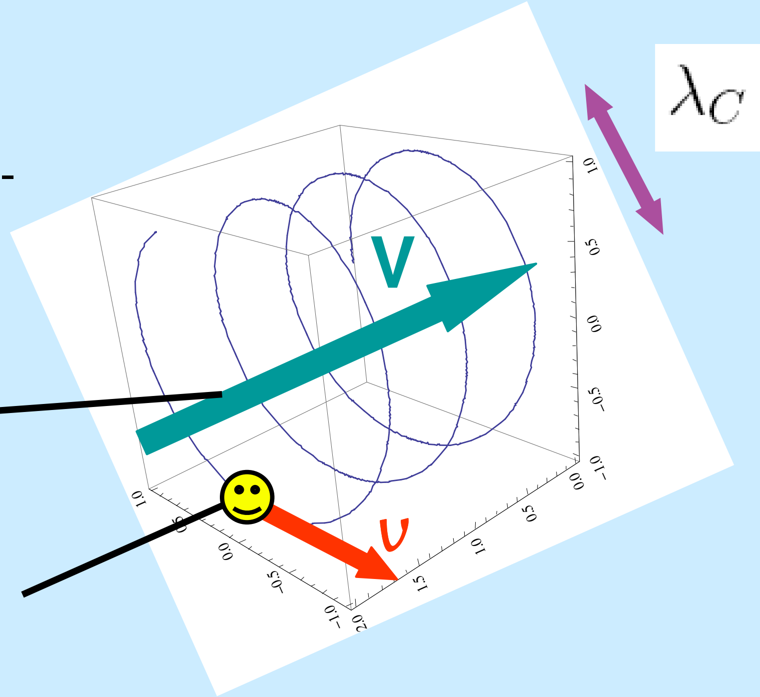
Compton-hullámhossz: az **egyrészecske**-kvantummechanka alsó határa

A Zitterbewegung értelmezése:

Schrödinger megpróbálta
a **SPIN** jelenségét „megmagyarázni'
a Zitterbewegung segítségével:
az elektron „belső" mozgása,
forgása egy „belső térben" –
ennek következménye a „saját"
$\hbar/2$ impulzusmomentum.

Az ötlet nem vált be.

az elektron "tömeg-közép-pontjának" állandó sebességű mozgása



az elektron helyzete

Szokásos tankönyvi mentegetőzések:

A Zitterbewegung csak **fiktív jelenség**, sohasem észlelhető,
mert
frekvenciája túl nagy,
amplitudója túl kicsi.

A ZB csak arra a tényre utal,
hogy az elektron
nem lokalizálható teljesen,
a Compton-hullámhossz
skáláján **elmosódott**.

A Compton-hullámhossz az egyrészecske-elmélet alsó határa!

Zitterbewegung a nanofizikában

A Zitterbewegungot a relativisztikus QM-ban fedezték fel.
De egyáltalán nem relativisztikus effektus!

Fellép számos modellben, amit a szilárdtestfizika és a nanofizika vizsgál.
(2000 körül jöttek rá)
Mi több: itt a (hamarosan) észlelhető és mérhető tartományba esik.

Befolyásolhatja az elektromos és a hővezetést, a Hall-effektust,
a sörétzajt és számos más nanoszintű jelenséget.

A nanofizikai modellekben fellépő Zitterbewegung általános leírását és egzakt megoldását adtuk meg, lefedve a ZB addigi irodalmi említéseit.

Legújabban további, sokkal általánosabb rendszerekre is kiterjesztettük a leírást és a megoldást.

Miért jó és mire jó a Zitterbewegung a szilárdtest-és nanofizikában?

- kis gap: **mérhető** frekvenciatartomány (Sch: mc^2 = 1 MeV, szilfiz: 10 eV)
- sok részecske: transzporttulajdonságok
- az effektív Hamilton-operátor paraméterei **vezérelhetők** (pl- E térrel: Rashba)
- **univerzális** viselkedés
- esetleges Zitter-mentes állapotok preparálhatók: új vezetési tulajdonságok

Kísérleti lehetőségek:

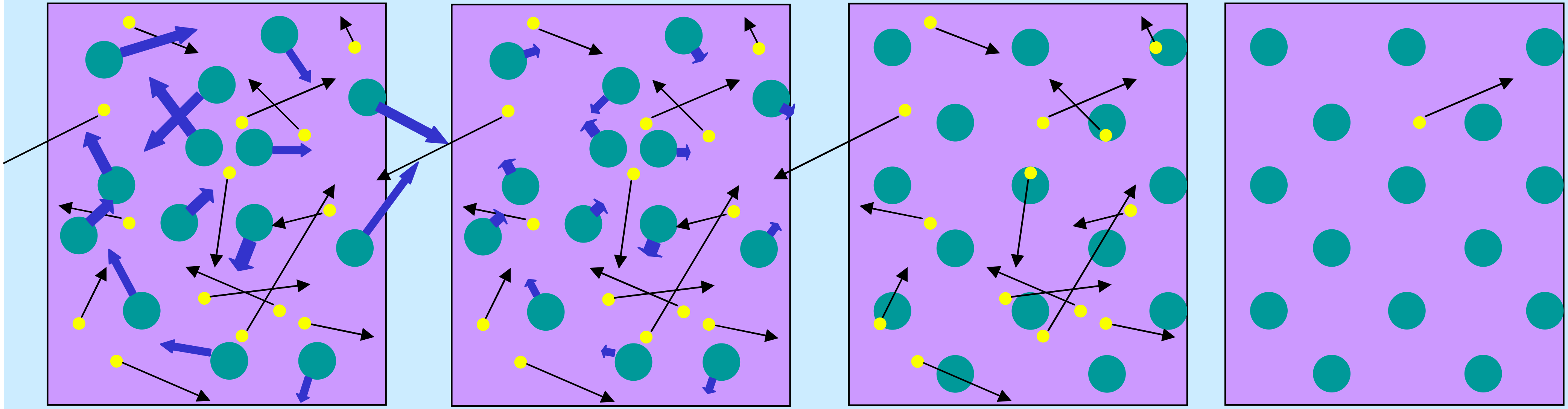
- vezetőképesség
- sörétzaj (grafén: ballisztikus, de a sörétzaj a szennyezett anyagokra jellemző:
  a háttérben talán a ZB áll)
- egyéb transzportjelenségek (pl spin-Hall)

Elméleti érdekességek:

- univerzalitás
- még általánosabb modellek
- kapcsolat rokon területekkel (spin-Hall, Berry-fázis)
- más rendszerek (pl **FÉNY**: spin-Hall of light.... **Zitter of light???**)

Effektív Hamilton-operátorok a szilárdtestfizikában

A szilárdtestek leírásának fázisai



káosz: ionok és elektronok általános mozgása

a könnyű, gyors elektronok adiabatikusan követik a nehéz, lassú ionokat

az ionok állnak az egyensúlyi helyzetben: kristályrács

csak EGYETLEN elektron mozog a kristályrácsban

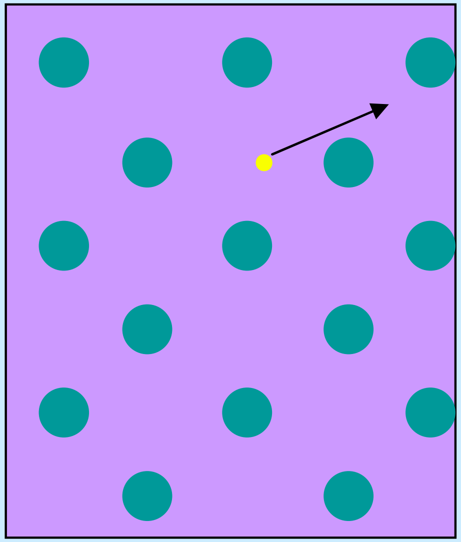
adiabatikus közelítés: az elektronok leválasztása

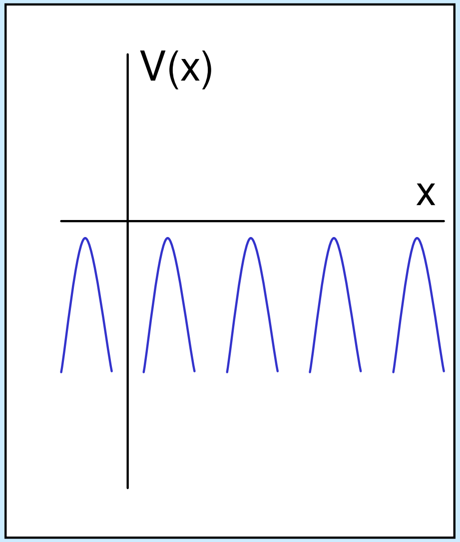
a háttér rögzítése: stacionárius probléma

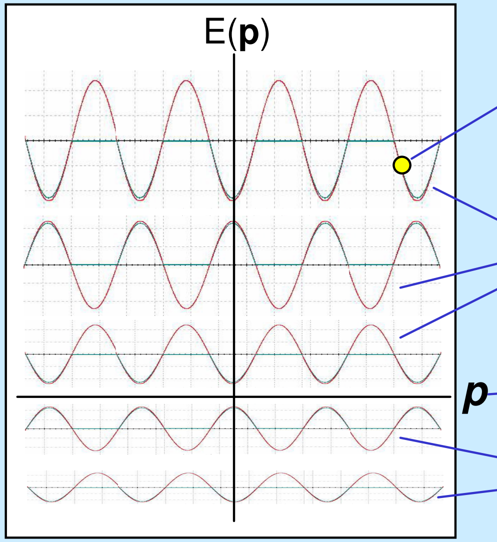
egytest-probléma

Effektív Hamilton-operátorok a szilárdtestfizikában

A szilárdtestek leírásának fázisai







minden pont egy lehetséges **egyelektron-állapotot** képvisel: haladó hullámok

vezetési sávok

kvázi-impulzus

vegyérték-sávok

csak EGYETLEN elektron mozog a kristályrácsban

EGY elektron mozog egy periódikus potenciálban

sávszerkezet

haladó hullámok: NINCS explicit x-függés:

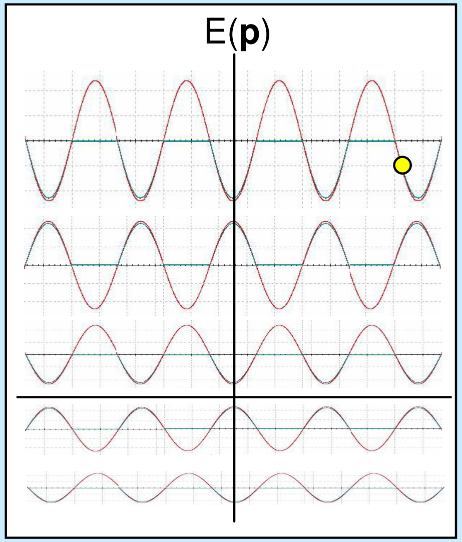
kvázi-szabad rendszer

potenciál

Bloch-elmélet:

az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet megoldása

Effektív Hamilton-operátorok a szilárdtestfizikában

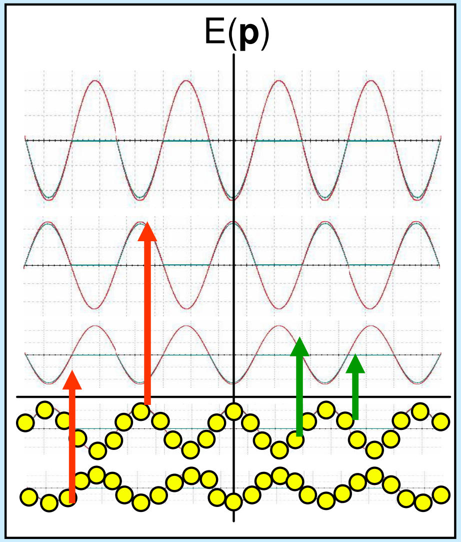


az egyrészecske-elmélet sávszerkezete

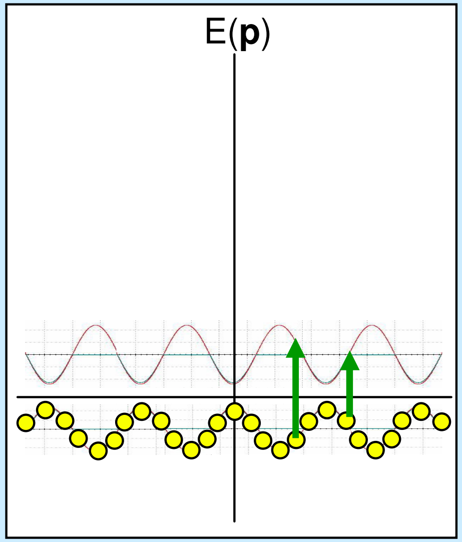
többrészecske-elmélet, Pauli--elv:

egy állapotban csak egy elektron lehet

töltsük be a legalacsonyabb megengedett szinteket: Fermi-energia



betöltött és üres sávok, gapek, megengedett és tiltott átmenetek



effektív két-sávos elmélet:

minden *p* értékhez csak 2 energiaszint

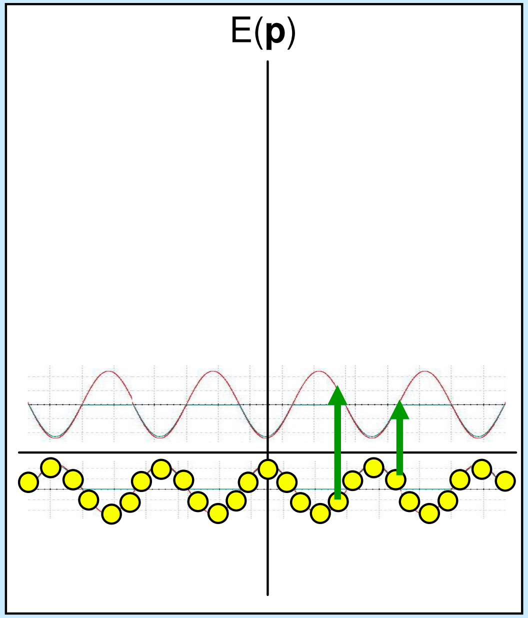
a többrészecske-elmélet ideiglenes bevetése (elektron-elektron kölcsönhatás nélkül)

új effektív egyelektronos Hamilton-operátor: 2 * 2 mátrix

A Hamilton-operátor általános alakja

Effektív Hamilton-operátor:

- minden ***p* értékre külön**
- nincs *x*-függés:
  "kvázi-szabad" rendszer
- 2 * 2 mátrix
- hermitikus



a legáltalánosabb alak:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{11}(\hat{\mathbf{p}}) & \hat{H}_{12}(\hat{\mathbf{p}}) \\ \hat{H}_{21}(\hat{\mathbf{p}}) & \hat{H}_{22}(\hat{\mathbf{p}}) \end{pmatrix} = \epsilon(\hat{\mathbf{p}})\,\mathbb{I} + \mathbf{\Omega}(\hat{\mathbf{p}})\,\hat{\mathbf{S}}$$

hermiticitás:

$$\hat{H}_{11} = \hat{H}_{11}^{+} \qquad \hat{H}_{21} = \hat{H}_{12}^{+} \qquad \hat{H}_{22} = \hat{H}_{22}^{+}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

A nanofizikai irodalomban előforduló fontosabb modellek Hamilton-operátorai

Példák

system	D	H	Ω	$\varepsilon(\mathbf{p})$
Rashba-Dresselhaus	2	$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\alpha}{\hbar}\left(p_x\sigma_y - p_y\sigma_x\right) + \frac{\beta}{\hbar}\left(p_y\sigma_y - p_x\sigma_x\right)$	$\frac{2}{\hbar^2}\begin{pmatrix} -\alpha\, p_y - \beta\, p_x \\ \alpha\, p_x + \beta\, p_y \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$
Heavy holes in a quantum well	2	$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\frac{\tilde{\alpha}}{2\hbar^3}\left(p_-^3\sigma_+ - p_+^3\sigma_-\right)$	$\frac{2\tilde{\alpha}}{\hbar^4}\begin{pmatrix} p_y\left(3p_x^2 - p_y^2\right) \\ p_x\left(3p_y^2 - p_x^2\right) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$
Bulk Dresselhaus	3	$\frac{\gamma_D}{\hbar^3}\left[\sigma_x p_x\left(p_y^2 - p_z^2\right) + \sigma_y p_y\left(p_z^2 - p_x^2\right) + \sigma_z p_z\left(p_x^2 - p_y^2\right)\right]$	$\frac{2\gamma_D}{\hbar^4}\begin{pmatrix} p_x\left(p_y^2 - p_z^2\right) \\ p_y\left(p_z^2 - p_x^2\right) \\ p_z\left(p_x^2 - p_y^2\right) \end{pmatrix}$	0
Single-layer graphene	2	$v\left(p_x\sigma_x + p_y\sigma_y\right)$	$\frac{2v}{\hbar}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$	0
Bilayer graphene	2	$\frac{1}{2m}\left(\frac{p_+^2 + p_-^2}{2}\sigma_x - \frac{p_-^2 - p_+^2}{2i}\sigma_y\right)$	$\frac{1}{m\hbar}\begin{pmatrix} p_x^2 - p_y^2 \\ 2p_x p_y \\ 0 \end{pmatrix}$	0
Cooper pairs	3	$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E_F\right)\sigma_z + \Delta\sigma_x$	$\frac{2}{\hbar}\begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \\ \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F \end{pmatrix}$	0
Nearly free electrons	3	$H = \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} & V_{\mathbf{q}} \\ V_{\mathbf{q}}^* & \epsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \Re\{V_{\mathbf{q}}\} \\ -\Im\{V_{\mathbf{q}}\} \\ \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}}\right) \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\left(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}\right)$

$$\boxed{\hat{H} = \epsilon(\hat{\mathbf{p}})\,\mathbb{I} + \boldsymbol{\Omega}(\hat{\mathbf{p}})\,\hat{\mathbf{S}}}$$

A koordináta-operátor mozgásegyenletének egzakt megoldása:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(0) + \left(\hat{\mathbf{V}} + \frac{\partial\,\Omega}{\partial\mathbf{p}}(\mathbf{n}\,\hat{\mathbf{S}}^0)\right)t + \frac{\sin\,\Omega\,t}{\Omega}\,\mathbf{K}\left(\hat{\mathbf{S}}^0 - \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\,\hat{\mathbf{S}}^0)\right) + \frac{\cos\,\Omega\,t\,-\,1}{\Omega}\,\mathbf{K}\left(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{S}}^0\right)$$

ahol $\hat{V}_k = \dfrac{\partial\,\epsilon(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_k}$ az átlagsebesség operátora

$\hat{K}_{kl}\,(\hat{\mathbf{p}}) = \dfrac{\partial\,\Omega_l(\hat{\mathbf{p}})}{\partial p_k}$ az együtthatók mátrixa

$\boldsymbol{\Omega}(\hat{\mathbf{p}}) = \Omega\,(\hat{\mathbf{p}})\,\mathbf{n}\,(\hat{\mathbf{p}})$ ahol $\Omega = |\,\boldsymbol{\Omega}\,|$ és $|\,\mathbf{n}\,| = 1$

A Zitterbewegung értelmezése

Végeredményünk különböző tagokat tartalmaz:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(0) -$$

a kezdeti helyoperátor $\hat{\mathbf{x}}(0)$

$$- \frac{1}{\Omega} \mathbf{K} \left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{S}}^0 \right) +$$

a ZB tengelyének eltolódása $\hat{\mathbf{Y}}$

$$+ \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{n} \hat{\mathbf{S}}^0) \right) t +$$

egyenletes mozgás a reguláris + anomális sebességgel $\hat{\mathbf{W}} t$

$$+ \left[\frac{\sin \Omega t}{\Omega} \mathbf{K} \left(\hat{\mathbf{S}}^0 - \mathbf{n} (\mathbf{n} \hat{\mathbf{S}}^0) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos \Omega t}{\Omega} \mathbf{K} \left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{S}}^0 \right) \right]$$

oszcilláló “Zitterbewegung”-tagok $\hat{\mathbf{Z}}(t)$

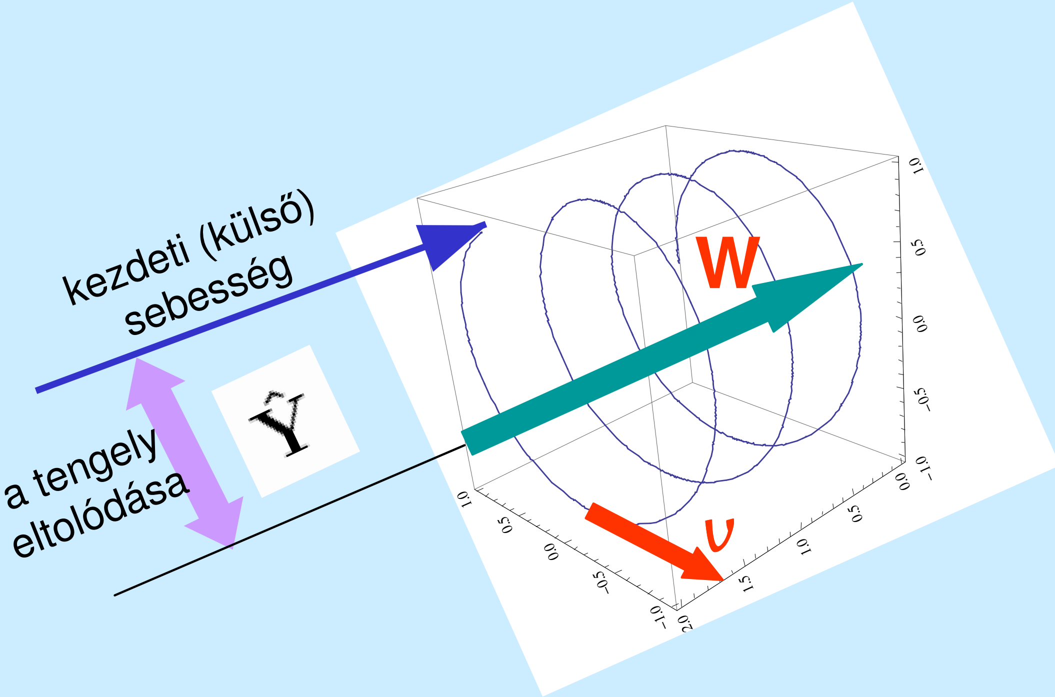
A Zitterbewegung értelmezése

a kezdeti helyoperátor $\hat{\mathbf{x}}(0)$

a tengely eltolódása $\hat{\mathbf{Y}}$

egyenletes mozgás a reguláris + anomális sebességgel $\hat{\mathbf{W}}\, t$

oszcilláló "Zitterbewegung"-tagok $\hat{\mathbf{Z}}(t)$



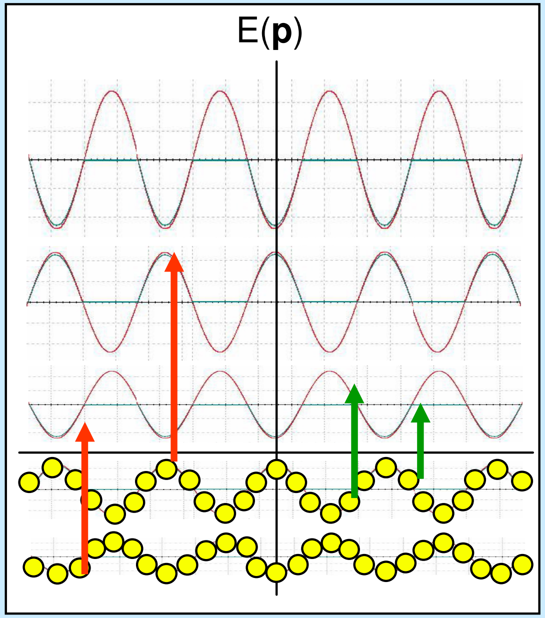
A fentiek megjelentek: **J. Cserti, Gy. D.**: *Unified Description of the Zitterbewegung for Spintronic, Graphene, and Superconducting Systems*, Physics. Review. **B 74**, 172305 (2006)

Zitterbewegung újratöltve: általános elmélet

a Hamilton-operátor MÉG ÁLTALÁNOSABB ALAKJA

Effektív Hamilton-operátor:

- minden ***p*** **értékre külön**
- nincs *x*-függés:
  "kvázi-szabad" rendszer
- N * N mátrix
- hermitikus



több mint 2 sávos modellek

a Hamilton-operátor legáltalánosabb alakja:

$$\hat{H}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \hat{H}_{11}(\hat{p}) & \hat{H}_{12}(\hat{p}) & \dots & \hat{H}_{1n}(\hat{p}) \\ \hat{H}_{21}(\hat{p}) & \hat{H}_{22}(\hat{p}) & \dots & \hat{H}_{2n}(\hat{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{H}_{n1}(\hat{p}) & \hat{H}_{n2}(\hat{p}) & \dots & \hat{H}_{nn}(\hat{p}) \end{pmatrix} = \hat{H}^{+}(\hat{p})$$

hermiticitás:

$$\hat{H}_{kl} = \hat{H}^{+}_{lk}$$

Hogyan számítjuk ki az időfüggő $\hat{\mathbf{x}}(t)$ operátort Heisenberg-képben?

Heisenberg definíciója: $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{U}(t,\, \mathbf{p})^{-1}\, \hat{\mathbf{x}}(0)\, \hat{U}(t,\, \mathbf{p})$ ahol $\hat{U}^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t}$ és $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t}$

Tudjuk, hogy Schrödinger-képben: $\hat{\mathbf{x}}(0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$

tetszőleges $f(\hat{\mathbf{p}})$ függvényre a kommutátor: $[\mathbf{x}(0), f(\hat{\mathbf{p}})] = i\hbar \frac{\partial f(\hat{\mathbf{p}})}{\partial \mathbf{p}}$

Ezért:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{U}^{-1}\, \hat{\mathbf{x}}(0)\, \hat{U} = \hat{U}^{-1} \left[\mathbf{x}(0), \hat{U}\right] + \hat{U}^{-1}\hat{U}\, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) + i\, \hbar\, \hat{U}^{-1} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \mathbf{p}}$$

Kiszámolandó:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t}\; i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t}}$$

1-komponensű hullámfüggvényre:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t} = \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\, t\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})\, t\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\, t}$$

Így: $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(0) + \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p})\, t$ állandó sebességű mozgás! $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \hat{H}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$

Többkomponensű hullámfüggvényre használjuk fel

a Hamilton-mátrix projektor-felbontását:

$$H = \sum_a E^a Q^a$$

Q^a projektorok:

$$Q^a(p) = \sum_s |u^{a\,s}(p)\rangle \langle u^{a\,s}(p)|$$

ahol a $\hat{H}(p)|u^a(p)\rangle = E^a(p)\,|u^a(p)\rangle$ energia-sajátértékprobléma adja

az $E^a(p)$ sajátértékeket és az $|u^a(p)\rangle$ sajátvektorokat. (az s index a degenerációt jelöli)

Ortogonalitás és teljesség:

$$Q^a Q^b = \delta_{ab} Q^a \qquad \sum_a Q^a = I$$

Az operátorfüggvények alaptétele:

a minden $x = E^a$ helyen értelmezett $f(x)$ függvényekre:

ha $H = \sum_a E^a Q^a$ akkor $f(H) = \sum_a f(E^a)\, Q^a$

Alkalmazzuk az alaptételt az $\hat{U}(t,\, \mathbf{p})$ operátorra:

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t} = \sum_b e^{-\frac{i}{\hbar}E_b\,t}\,Q_b$$

Így kiszámítható az időfüggő helyoperátor:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{U}^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\hat{U}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t}$$

$$= \left(\sum_a e^{\frac{i}{\hbar}E_a\,t}\,Q_a\right)\, i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left(\sum_b e^{-\frac{i}{\hbar}E_b\,t}\,Q_b\right)$$

$$= \sum_a\sum_b e^{\frac{i}{\hbar}(E_a - E_b)\,t}\left(\frac{\partial E_b}{\partial \mathbf{p}}\,t\right)\underbrace{Q_a Q_b}_{\delta_{ab}\,Q^a} + i\hbar\sum_a\sum_b e^{\frac{i}{\hbar}(E_a-E_b)\,t}\;Q_a\,\frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}}$$

Bevezetve a „lebegési” frekvenciákat: $\omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$

megkapjuk az egzakt megoldást:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) =}$$

$$\boxed{= \underbrace{t \sum_a \frac{\partial E_a}{\partial \mathbf{p}} Q_a}_{\hat{\mathbf{W}}\, t} + \underbrace{i\hbar \sum_a Q_a \frac{\partial Q_a}{\partial \mathbf{p}}}_{\hat{\mathbf{Y}}} + \underbrace{i\hbar \sum_a \sum_{b \neq a} e^{i\omega_{ab} t} Q_a \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}}}_{\hat{\mathbf{Z}}(t)}}$$

állandó sebességű mozgás

fix eltolódás

oszcilláló “zitter” tagok

Általában egynél több „zitter”-frekvencia jelenik meg!

Schrödinger eredeti példája és a legtöbb vizsgált modell csak két energiaszintes volt, ezért lépett fel csak egyetlen rezgési frekvencia.

A megoldás alternatív alakjai

Használjuk fel:

$$\sum_a \sum_b Q_a \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}} = \sum_a Q_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\sum_b Q_b \right) = I \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} I = 0$$

Az eltolódási tag átírható:

$$\mathbf{Y} = \sum_a Q_a \frac{\partial Q_a}{\partial \mathbf{p}} = - \sum_a \sum_{b \neq a} Q_a \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}}$$

és beolvasztható az oszcilláló tagokba:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = t \sum_a \frac{\partial E_a}{\partial \mathbf{p}} Q_a + i\hbar \sum_a \sum_{b \neq a} \left(e^{i\omega_{ab} t} - 1 \right) Q_a \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}}$$

Definiáljuk a **parciális sebességeket** és a **Zitterbewegung-amplitudókat**:

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{p}) = \frac{\partial E_a(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\mathbf{C}_{ab}(\mathbf{p}) = i\hbar\, Q_a \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}}$$

írhatjuk:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = t \sum_a \mathbf{V}_a(\mathbf{p})\, Q_a + \sum_a \sum_{b \neq a} \left(e^{i\omega_{ab} t} - 1 \right) \mathbf{C}_{ab}(\mathbf{p})$$

A Zitterbewegung és a Berry-konnexió

A projektorok kifejezhetők a sajátvektorokkal:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) =}$$

$$\boxed{= t \sum_a \mathbf{V}_a \, |u_a(\mathbf{p})\rangle\langle u_a(\mathbf{p})| + \sum_{a,b} \left(e^{i\,\omega_{ba}\,t} - 1 \right) \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{p}) \, |u_a(\mathbf{p})\rangle\langle u_b(\mathbf{p})|}$$

ahol bevezettük a Berry-konnexió mátrixát:

$$\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{p}) = i\hbar \, \langle u_a(\mathbf{p})| \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} |u_b(\mathbf{p})\rangle$$

Váratlan kapcsolat lépett fel a Zitterbewegung általános jelensége és a geometriai fázis elméletében szereplő Berry-konnexió között.
A kapcsolat mögött egy impulzustérbeli nem-abeli mértéktranszformáció áll.

Altér-páronként bevezethetők az $M_{ab} = Q_a - Q_b = -M_{ba}$

gyengén involutórikus operátorok, melyek kielégítik: $M^3 = M$

Ezekkel kifejezhetők a projektorok:

$$Q_a = (M_{ab}^2 + M_{ab})/2 \qquad Q_b = (M_{ab}^2 - M_{ab})/2$$

és a Zitterbewegung-amplitudók is:

$$Q_a \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}} = \frac{M_{ab}^2 + M_{ab}}{2} \frac{\partial M_{ab}}{\partial \mathbf{p}} M_{ab} \qquad Q_b \frac{\partial Q_b}{\partial \mathbf{p}} = \frac{M_{ab}^2 - M_{ab}}{2} \frac{\partial M_{ab}}{\partial \mathbf{p}} M_{ab}$$

Behelyettesítve: $\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{W}\, t +$

$$+ \frac{i\hbar}{4} \sum_a \sum_{b \neq a} \left[i \sin(\omega_{ab}\, t) + M_{ab} \left(\cos(\omega_{ab}\, t) - 1\right)\right] M_{ab} \frac{\partial M_{ab}}{\partial \mathbf{p}} M_{ab}$$

$$= \mathbf{W}\, t + \frac{i\hbar}{4} \sum_{a,b} \left(e^{i\,\omega_{ab} M_{ab}\, t} - 1\right) \frac{\partial M_{ab}}{\partial \mathbf{p}} M_{ab}$$

Ez a kifejezés nagyon hasonlít Schrödinger eredeti formulájára.

Várható érték

Ismerjük a helyoperátor időfüggését –
számítsuk ki várható értékét:

Kezdőállapot: $|\Psi^0\rangle = \sum_a c_a \, |u^a(p)\rangle$

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \langle\Psi^0|\,\hat{\mathbf{x}}(t)\,|\Psi^0\rangle = \langle\Psi^0|\,\hat{\mathbf{x}}(0)\,|\Psi^0\rangle + t\sum_a \mathbf{V}^a\,|c_a|^2 +$$

$$+\sum_a\sum_{b\neq a}\left(e^{\,i\,\Omega_{ba}\,t}-1\right)\,\mathbf{A}^{ab}\,c_b^*\,c_a$$

A V^a parciális sebességek súlyozódnak a $w_a = |c_a|^2$ valószínűségekkel.

Speciális eset: induljunk ki az i-ik energia-sajátállapotból: $c_a = \delta_{ai}$

Így: $\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{V}^i(p)\,t$

Tiszta energia-sajátállapotokban NEM LÉP FEL a Zitterbewegung!

A Zitterbewegung oka a különböző energia-sajátállapotok közti csatolás, „lebegés”.

PÉLDÁK (szemelvények)

A/ Csak KÉT energia-sajátértékkel rendelkező rendszerek

E rendszereknek két típusa van:

a/ a Hamilton-operátor 2 x 2-es mátrix – a korábbi spin-algebra használható

b/ a belső tér dimenziója nagyobb 2-nél, de degeneráció lép fel.

$$H = E_+(\mathbf{p})Q_+(\mathbf{p}) + E_-(\mathbf{p})Q_-(\mathbf{p}) = \boxed{\varepsilon\, I + \frac{\hbar\omega}{2} T}$$

$$\varepsilon = \frac{E_+ + E_-}{2}$$

az átlagenergia

ahol $T = Q_+ - Q_-$ tükröző operátor: $T^2 = I$

$$\omega = \frac{E_+ - E_-}{\hbar}$$

a lebegési frekvencia

Ekkor

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{W}\, t + \mathbf{Z}(t)$$

ahol

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} I + \frac{1}{2} \frac{\partial \hbar\omega}{\partial \mathbf{p}} T$$

és

$$\mathbf{Z}(t) = \frac{\hbar}{2} \sin(\omega t) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{i\hbar}{2} (\cos(\omega t) - 1)\, T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}$$

B/ Speciális eset:
az eredeti Schrödinger-féle ZB:
relativisztikus szabad Dirac-elektron

$$\hat{H} = c\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + mc^2\beta$$

$$\hat{H}^2 = E^2 \qquad E = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + (mc^2)^2}$$

Vezessük be: $T = \hat{H}/E$ Ez tükröző operátor: $T^2 = \hat{H}^2/E^2 = 1$

így $\hat{H} = \dfrac{\hbar\omega}{2} T$ ahol $\varepsilon = 0$ és $\omega = 2E/\hbar$

Deriválva: $$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\partial E}{\partial\mathbf{p}} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E} \equiv \mathbf{V}T$$ és $$\frac{\partial T}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\partial\left(\hat{H}/E\right)}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{V}}{E}$$

ahol $\mathbf{V} = c^2\mathbf{p}\hat{H}^{-1}$ és $\mathbf{v} = c\,\boldsymbol{\alpha}$

Így a Zitterbewegung képlete:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}\,t + \frac{\hbar}{2}\sin(\omega t)\,\frac{\mathbf{v}-\mathbf{V}}{E} + \frac{\hbar}{2i}\left(\cos(\omega t) - 1\right)\,T\,\frac{\mathbf{v}-\mathbf{V}}{E}$$

$$= \mathbf{V}\,t + i\hbar\,(\mathbf{v}-\mathbf{V})\,\frac{e^{-\frac{2i\hat{H}}{\hbar}t} - 1}{2\hat{H}}$$

megegyezik Schrödinger eredeti eredményével.

C/ Egyrétegű grafén

Effektív Hamilton-operátor
a Dirac-pont közelében:

$$\boxed{\hat{H} = v\,(\mathbf{p}\,\sigma) = v\begin{pmatrix} 0 & p_x - i\,p_y \\ p_x + i\,p_y & 0 \end{pmatrix}}$$

Energia-sajátértékek
(lineáris diszperziós reláció):

$$\boxed{E = \pm v\,p}$$

$$\Omega(\mathrm{p}) = \frac{2\,v}{\hbar}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \frac{2\,v}{\hbar}\,p$$

Kétkomponensű rendszer: alkalmazható a kvázispin-séma vagy a tükröző-operátoros módszer is.

$$\mathbf{W}_a = \frac{\partial\,\Omega}{\partial \mathrm{p}}(\mathbf{n}\,\mathbf{S}) = v\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\,\sigma)$$

A helyoperátor időfüggése:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + v\,\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\,\sigma)\,t + \frac{v}{\Omega}(\mathbf{n}\times\mathbf{e})\,(\mathbf{e}\,\sigma)\left[(1 - \cos\Omega\,t)\,I + i\,(\mathbf{n}\,\sigma)\,\sin\Omega\,t\right]}$$

Mátrixos alakban:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + t\,\frac{v\,\mathbf{p}}{p}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2\,p^2}(\mathbf{p}\times\mathbf{e})\begin{pmatrix} 1 - \cos\,\Omega\,t & i\,e^{-i\varphi}\,\sin\Omega\,t \\ -i\,e^{i\varphi}\,\sin\,\Omega\,t & \cos\,\Omega\,t - 1 \end{pmatrix}}$$

D/ Luttinger-modell

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2\right)\mathbf{p}^2 - 2\gamma_2(\mathbf{pS})^2\right]$$

A Hamilton-operátor felbontása:

$$\hat{H} = E_H(\mathbf{p})Q_H(\mathbf{p}) + E_L(\mathbf{p})Q_L(\mathbf{p})$$

ahol $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$

a 3/2 spin operátorai (4 x 4-es mátrixok)

Energia-sajátértékek:

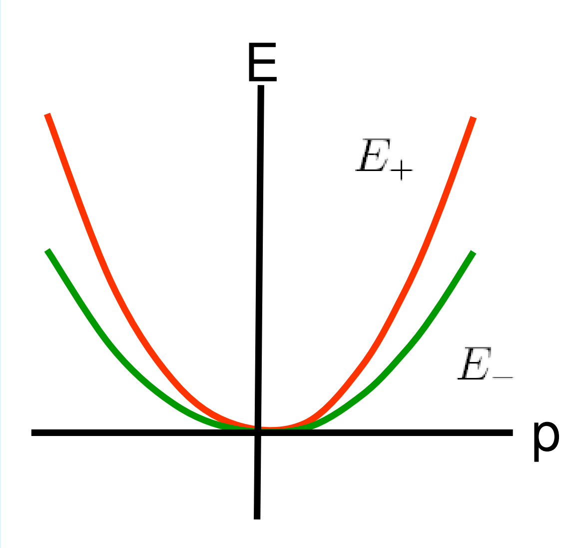
$$E_L(\mathbf{p}) = \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2}{2m}\mathbf{p}^2 \qquad E_H(\mathbf{p}) = \frac{\gamma_1 - 2\gamma_2}{2m}\mathbf{p}^2$$

Projektorok:

$$Q_L(\mathbf{p}) = \frac{9}{8}I_4 - \frac{1}{2\,\mathbf{p}^2}(\mathbf{pS})^2$$

$$Q_H(\mathbf{p}) = -\frac{1}{8}I_4 + \frac{1}{2\,\mathbf{p}^2}(\mathbf{pS})^2$$

Diszperziós reláció



Átlag-energia:

$$\varepsilon = \frac{E_+ + E_-}{2} = \frac{\gamma_1}{2m}\mathbf{p}^2$$

Lebegési frekvencia:

$$\hbar\omega = E_+ - E_- = \frac{2\gamma_2}{m}\mathbf{p}^2$$

A tükröző operátor:

$$T = Q_+ - Q_- = \frac{5}{4}I_4 - \frac{(\mathbf{pS})^2}{\mathbf{p}^2}$$

D/ Luttinger-modell

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{W}\,t + \mathbf{Z}(t)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{W}} = \frac{\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2}{m}\,\mathbf{p} - \frac{2\gamma_2}{m}\,\frac{\mathbf{p}\,(\mathbf{pS})}{\mathbf{p}^2}$$

és

$$\hat{\mathbf{Z}}(t) = \hbar \sin(\omega t) \left(\frac{\mathbf{p}(\mathbf{pS})^2}{\mathbf{p}^4} - \frac{\mathbf{S}\,(\mathbf{pS}) + (\mathbf{pS})\,\mathbf{S}}{2\,\mathbf{p}^2} \right)$$

$$-\frac{i\hbar}{4\,\mathbf{p}^4}\left(\cos(\omega t) - 1\right)\left[(\mathbf{pS})^2\mathbf{S}\,(\mathbf{pS}) - (\mathbf{pS})\,\mathbf{S}(\mathbf{pS})^2 + (\mathbf{pS})^3\mathbf{S} - \mathbf{S}(\mathbf{pS})^3\right]$$

némi spin-algebrával tovább alakítható:

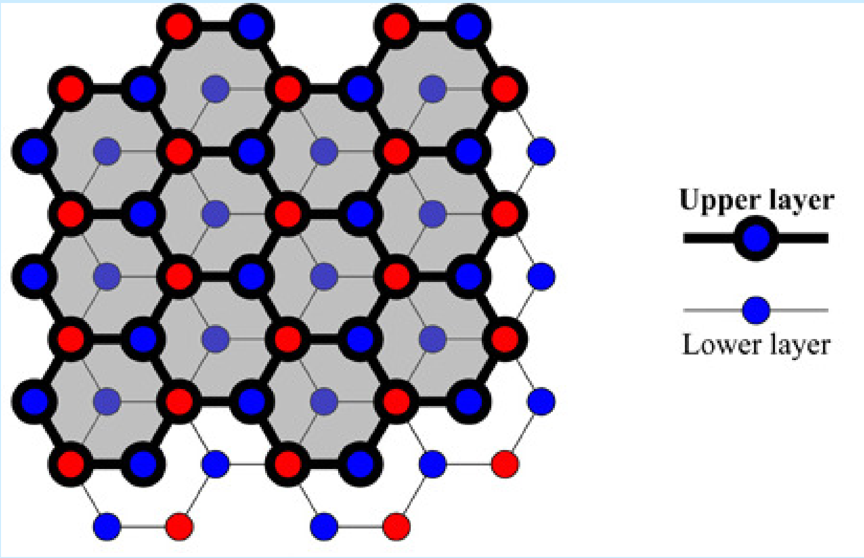
$$\hat{\mathbf{Z}}(t) = \hbar \sin(\omega t) \left(\frac{\mathbf{p}(\mathbf{pS})^2}{\mathbf{p}^4} - \frac{\mathbf{S}\,(\mathbf{pS}) + (\mathbf{pS})\,\mathbf{S}}{2\,\mathbf{p}^2} \right)$$

$$+\hbar\left(1 - \cos(\omega t)\right)\frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{S})\ (\mathbf{pS})^2 + 2\,(\mathbf{pS})\,(\mathbf{p}\times\mathbf{S})\ (\mathbf{pS}) + (\mathbf{pS})^2\ (\mathbf{p}\times\mathbf{S})}{4\,\mathbf{p}^4}$$

E/ Kétrétegű grafén

Effektív Hamilton-operátor (most $\hbar = 1$):

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_- \\ 0 & 0 & p_+ & 0 \\ 0 & p_- & 0 & 2m \\ p_+ & 0 & 2m & 0 \end{pmatrix}$$



Definiáljuk: $\Omega(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$

A négy energia-sajátérték $\pm\alpha$ és $\pm\beta$

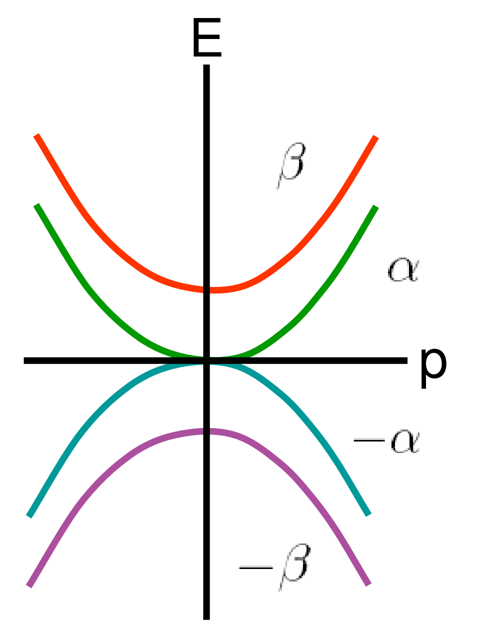
ahol $\alpha(\mathbf{p}) = \Omega - m$ és $\beta(\mathbf{p}) = \Omega + m$

Az energiaszintek között 6 lehetséges átmenet van, de csak 4 különböző lebegési frekvencia lép fel:

$$\omega_{\alpha,-\alpha} = 2\,\alpha \qquad \omega_{\beta,\alpha} = \omega_{-\alpha,-\beta} = \beta - \alpha = 2\,m$$

$$\omega_{\beta,-\beta} = 2\,\beta \qquad \omega_{\beta,-\alpha} = \omega_{\alpha,-\beta} = \alpha + \beta = 2\,\Omega$$

Diszperziós reláció



Kétrétegű grafén

Némi algebra után:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{W}\,t + \mathbf{Z}(t)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(t) = \frac{\hbar}{4\Omega^2}\,\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2}\left\{(\cos 2\,\alpha\,t - 1)\begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & -\beta\,p_- & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \beta\,p_+ \\ -\beta\,p_+ & 0 & \mathbf{p}^2 & 0 \\ 0 & \beta\,p_- & 0 & -\mathbf{p}^2 \end{pmatrix} + i\sin 2\,\alpha\,t \begin{pmatrix} 0 & \beta^2\,\frac{p_-^2}{\mathbf{p}^2} & 0 & -\beta\,p_- \\ -\beta^2\,\frac{p_+^2}{\mathbf{p}^2} & 0 & \beta\,p_+ & 0 \\ 0 & -\beta\,p_- & 0 & \mathbf{p}^2 \\ \beta\,p_+ & 0 & -\mathbf{p}^2 & 0 \end{pmatrix}\right.$$

$$+\;(\cos 2\,\beta\,t - 1)\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & \alpha\,p_- & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & 0 & -\alpha\,p_+ \\ \alpha\,p_+ & 0 & \mathbf{p}^2 & 0 \\ 0 & -\alpha\,p_- & 0 & -\mathbf{p}^2 \end{pmatrix} + i\sin 2\,\beta\,t \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2\,\frac{p_-^2}{\mathbf{p}^2} & 0 & -\alpha\,p_- \\ \alpha^2\,\frac{p_+^2}{\mathbf{p}^2} & 0 & \alpha\,p_+ & 0 \\ 0 & -\alpha\,p_- & 0 & -\mathbf{p}^2 \\ \alpha\,p_+ & 0 & \mathbf{p}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. +\;(\cos 2\,m\,t - 1)\begin{pmatrix} 2\,\mathbf{p}^2 & 0 & 2\,m\,p_- & 0 \\ 0 & -2\,\mathbf{p}^2 & 0 & -2\,m\,p_+ \\ 2\,m\,p_+ & 0 & -2\,\mathbf{p}^2 & 0 \\ 0 & -2\,m\,p_- & 0 & 2\,\mathbf{p}^2 \end{pmatrix} + i\sin 2\,m\,t \begin{pmatrix} 0 & 2\,p_-^2 & 0 & 2\,m\,p_- \\ -2\,p_+^2 & 0 & -2\,m\,p_+ & 0 \\ 0 & 2\,m\,p_- & 0 & -2\,\mathbf{p}^2 \\ -2\,m\,p_+ & 0 & 2\,\mathbf{p}^2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$+\;\frac{i\,\hbar\,m}{2\Omega^3}\,\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2}\left\{(\cos 2\,\Omega\,t - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega\,p_- & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Omega\,p_+ \\ -\Omega\,p_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega\,p_- & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\,\sin 2\,\Omega\,t \begin{pmatrix} \mathbf{p}^2 & 0 & m\,p_- & 0 \\ 0 & \mathbf{p}^2 & 0 & m\,p_+ \\ m\,p_+ & p_- & -\mathbf{p}^2 & 0 \\ 0 & m\,p_- & 0 & -\mathbf{p}^2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{p}}{\Omega^2}\begin{pmatrix} 0 & -m\,\frac{p_-^2}{\mathbf{p}^2} & & p_- \\ -m\,\frac{p_+^2}{\mathbf{p}^2} & 0 & p_+ & 0 \\ 0 & p_- & 0 & m \\ p_+ & 0 & m & 0 \end{pmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{e} = (0, 0, 1)$$

3 transzverzális és
1 longitudinális (cikloidális) módus van.

Konklúzió, tanulságok:

☺ A ZB igen általános jelenség, minden kvázi-szabad többkomponensű kvantumrendszer leírásakor fellép.

☺ A helyoperátor mozgása az általános esetben zárt alakban megadható, ebből a konkrét esetek könnyen számíthatók.

☺ A ZB-nek nincs közvetlen köze sem a spinhez, sem a relativitáshoz!

☺ A Schrödinger-féle ZB és a nanofizikai esetek közös vonásai:

❶ (kvázi-)szabad részecske (helyfüggetlen Hamilton-operátor)

❷ a többkomponensű hullámfüggvény fellépte

❸ a nemdiagonális Hamilton-operátor által leírt csatolás
a transzlációs és a belső szabadsági fokok között
(általánosított spin-pálya-kölcsönhatás)

☺ A ZB-t nem egyetlen határozott precessziós frekvencia jellemzi (ez csak a kétkomponensű rendszerek véletlen sajátsága), hanem az azonos impulzusértékhez tartozó különböző energia-sajátértékek közötti különbségek mind megjelennek, mint „lebegési" frekvenciák.

☺ A ZB-módusok amplitudói megegyeznek a Berry-konnexió együtthatóival.

A fentiek megjelennek: **Gy. Dávid, J. Cserti**: *General Theory of the Zitterbewegung* *elfogadva:* Physics Review. **B**, (2010) (arXiv:0909.2004)

☠ Valóban mutatja-e a helyoperátor várható értéke a ZB hatását?

Az impulzus-operátor állandó volta nem jelenti azt, hogy a rendszer impulzus-sajátállapotban van!

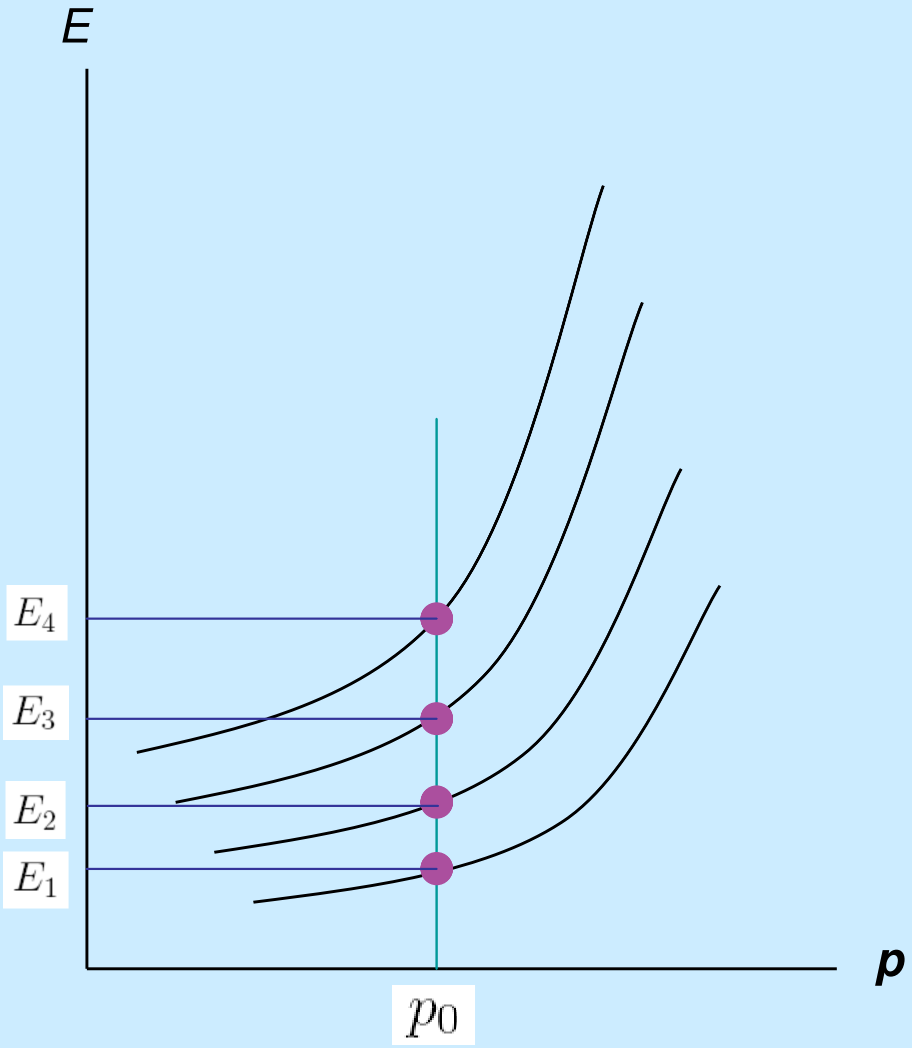
A hullámfüggvény általában a különböző impulzus-sajátállapotok folytonos szuperpoziciója:

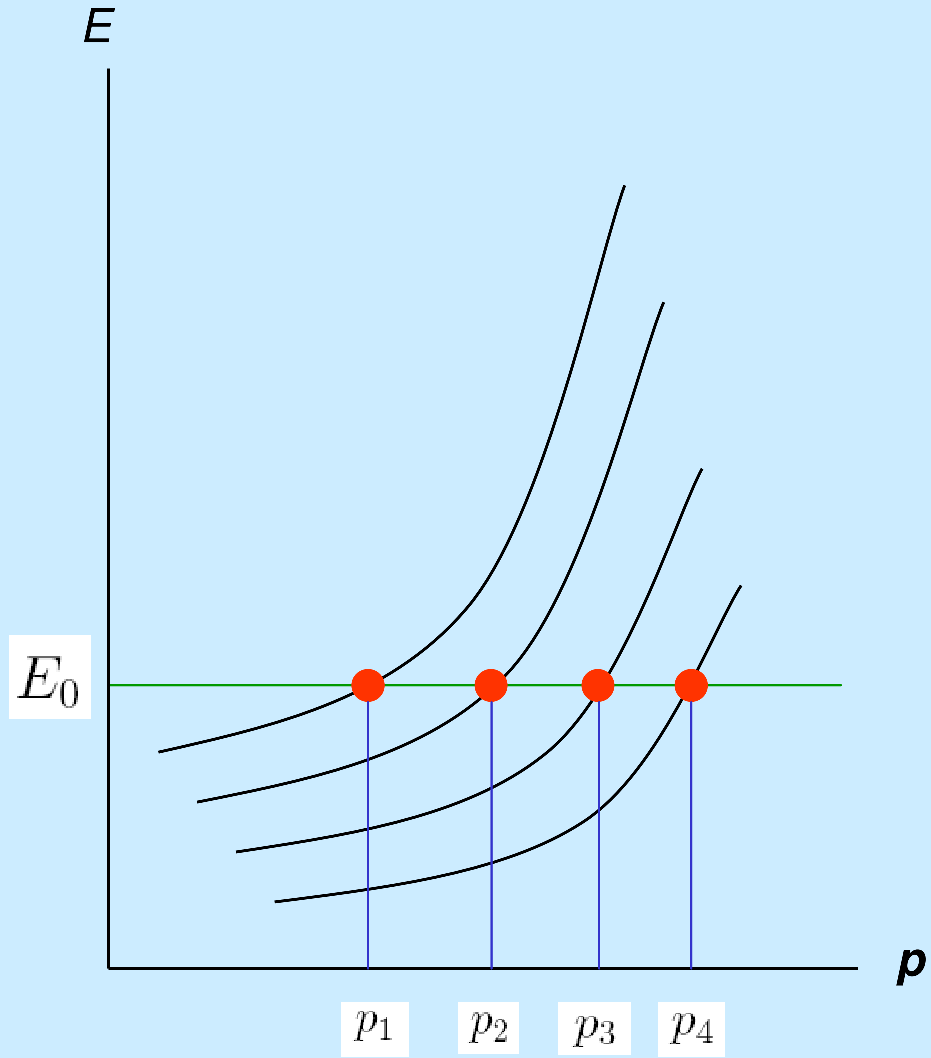
$$|\psi_0\rangle = \int d^3\mathbf{p} \sum_a c_a(\mathbf{p}) |u^a(\mathbf{p})\rangle$$

Ezért az $\bar{\mathbf{x}}(t) = \langle\psi_0|\,\hat{\mathbf{x}}(t)\,|\psi_0\rangle$ várható érték kiszámításához integrálnunk kell az impulzus értékei szerint:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \int d^3\mathbf{p} \sum_a \sum_b c_a^*(\mathbf{p})\, c_b(\mathbf{p}) \langle u^a(\mathbf{p})|\,\hat{\mathbf{x}}(t,\mathbf{p})\,|u^b(\mathbf{p})\rangle$$

A Zitterbewegung $\Omega_{ab}(\mathbf{p})$ lebegési frekvenciái függnek az impulzustól, ezért nem néhány diszkrét frekvencia lép fel, hanem **folytonos spektrum**, ami a legtöbb rendszer esetén teljesen **elmossa** a Zitterbewegung hatását.





Az elméletileg tárgyalt eset:

van Zitterbewegung

☺

E_0 energiájú részecske kerül a rendszerbe

nincs Zitterbewegung

☹

Kivétel: párhuzamos energiasávok

pl. a kétrétegű grafénban:

$$\omega_{\beta,\alpha} = \omega_{-\alpha,-\beta} = \beta - \alpha = 2m$$

Ekkor a(z egyik) lebegési frekvencia nem függ az impulzustól, a rezgési módus az impulzus szerinti **integrálás után is megmarad**.

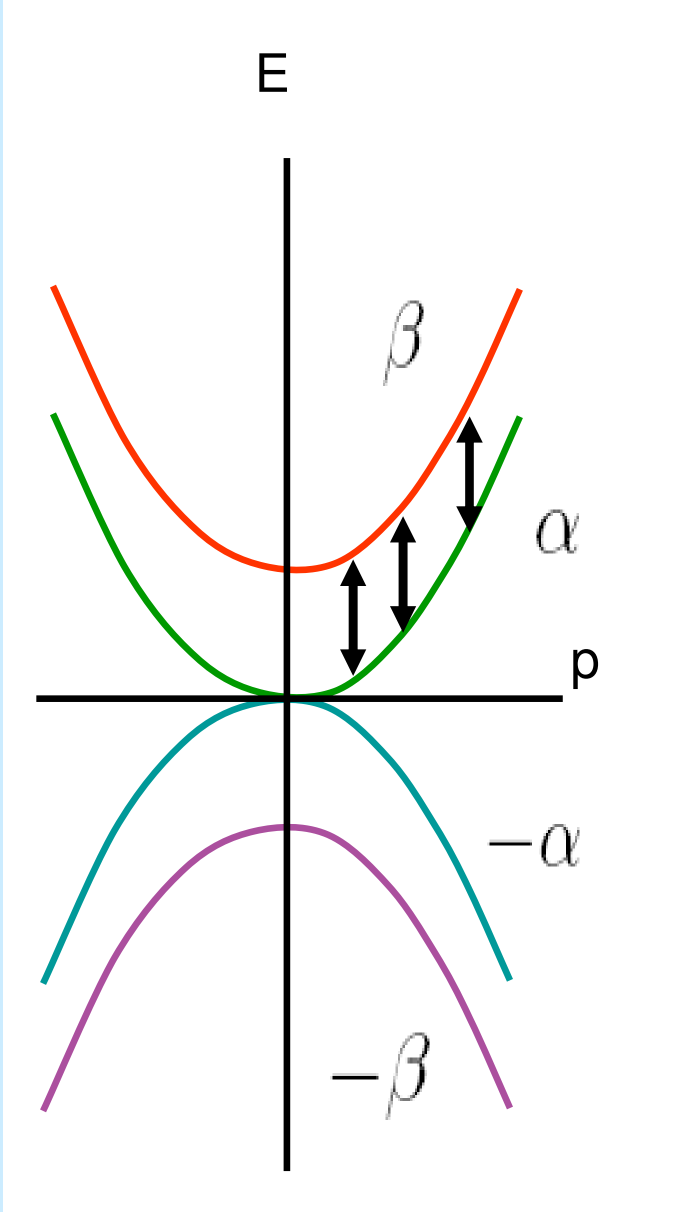
Ez a jelenség a **ZB-tartóshullám**.

A kétrétegű grafénban e különbség 1,4 eV.

Ennél a frekvenciánál az optikai vezetőképesség spektrumában éles csúcs mutatkozik.

Ez a ZB-tartóshullám és a fotonok kölcsönhatására utal.

További vizsgálat: másodkvantált formalizmusban.



Összefoglalás

- ☺ A ZB igen általános jelenség, fellép minden többkomponensű kvázi-szabad QM-rendszerben.
- ☺ Nincs közvetlen kapcsolat a ZB és a relativitáselmélet, illetve a ZB és a spin között.
- ☺ Az időfüggő helyoperátor az általános esetben egzaktul, zárt alakban meghatározható.
- ☺ Az általános megoldásban egy fix eltolódás, állandó parciális sebességek és altér-páronkénti oszcilláló tagok jelennek meg.
- ☺ Nem lép fel ZB a tiszta energia-sajátállapotban levő rendszerekben.
- ☺ A ZB oka a különböző energia-sajátállapotok közti csatolás, lebegés.
- ☺ A ZB-probléma a fejéről a talpára állítható: a QM-ban mindenütt fellépő oszcillációkból a ZB-feltételek fennállása esetén levezethető az állandó sebességű mozgás.
- ☺ A ZB és a Berry-konnexió mátrixa közti intim kapcsolat oka az impulzus-térbeli nem-abeli mértéktranszformáció.
- ☺ Az irodalomban előfordult (és elő nem fordult) speciális esetek könnyen kiadódnak az általános formalizmusból.
- ☺ A nanofizikából ismert reális paraméterek esetén a ZB amplitudója és frekvenciája a kísérletileg hamarosan kimutatható tartományba esik.
- ☺ Az energia-sávok párhuzamos elrendeződése esetén a ZB-tartóshullám extra hosszú ideig fennmarad, és optikai szórásкísérletekkel kimutatható.
- ☺ A ZB jelentős szerepet játszhat a nanorendszerek transzportjelenségeiben.

Zitterbewegung

Köszönöm a figyelmet!

0

Dávid Gyula
ELTE TTK
Atomfizikai
Tanszék