A pénzügyi kockázat mérése és kezelése

Varga-Haszonits István

Gazdasági Fizika Téli Iskola, 2009. január 31.

Áttekintés

Mi a kockázat?

- Intuitíve érezzük a választ.
- Megfogalmazni mégsem könnyű.
- Hát még mérni!
- És akkor még nem is kezeltük...

Melyik kockázatosabb?

- Képzeljünk el két különböző befektetést, A-t és B-t.
- Mindkettőbe 1000Ft-ért lehet beszállni.
- 1 év múlva:
  1. az A befektetés garantáltan 1100Ft-ot fizet,
  2. a B befektetés 50%-50% eséllyel 1000 vagy 1300Ft-ot fizet.
- Melyik a jobb üzlet?
- Melyik a kockázatosabb üzlet?

Melyik kockázatosabb?

- Képzeljünk el két másik befektetést, C-t és D-t.
- C és D ismét 1000Ft kezdőtőkét igényel.
- 1 év múlva:
  1. C 50-50% eséllyel 500, illetve 1500Ft-ot fizet,
  2. D 50-49-1% eséllyel 500, 1500, illetve 2000Ft-ot fizet.
- Melyik a jobb üzlet?
- Melyik a kockázatosabb üzlet?

Melyik kockázatosabb?

- Képzeljünk el két újabb befektetést, E-t és F-t.
- E és F ára szintén 1000Ft.
- 1 év múlva:
  1. E 50-50% eséllyel 1000, illetve 1200Ft-ot fizet,
  2. D 1-49-49-1% eséllyel -200, 1000, 1200 illetve 3000Ft-ot fizet.
- Melyik a jobb üzlet?
- Melyik a kockázatosabb üzlet?

Miben nyilvánul meg a kockázat?

- A végkifejlet pontosan nem ismert.
- Előfordulhat, hogy a végén kevesebb marad, mint amennyivel indulunk.
- Előfordulhat, hogy a befektetett pénzből semmi sem marad.
- Még az is megeshet, hogy adósok börtönébe kerülünk.
- Sőt, még azt sem tudhatjuk biztosan, hogy tisztában vagyunk-e a lehetséges kimenetelekkel.

Honnan ered a kockázat?

- Felmerül a kérdés, honnan származik a pénzügyi kockázat.
- Egy megszokott csoportosítás:
  - Piaci kockázat
  - Likviditási kockázat
  - Hitelkockázat
  - Működési kockázat
  - Jogi/szabályozási kockázat
- Valójában a fenti kategóriák nehezen elkülöníthetők.

Hogyan mérjük a kockázatot?

- A befektetések értéke/hozama valószínűségi változóként/sztochasztikus folyamatként modellezhető.
- A hozamok eloszlása tehát elvileg mindent elmond a kockázatról.
- Az információ ebben a formában azonban túl implicit, nehezen értelmezhető.
- Szeretnénk tehát valamiféle mérőszámot rendelni a kockázathoz.
- A kockázat ilyen értelemben az eloszlás valamilyen funkcionálja.
- A megfelelő funkcionál kiválasztása a kockázat elméletének legfontosabb, és talán legnehezebb problémája.

Hogyan becsüljük a kockázatot?

- A pénzügyi folyamatok eloszlását a gyakorlatban nem ismerjük.
- Így a jó kockázati mérték kiválasztása még csak félsiker.
- A kockázat pontos méréséhez megbízható adatokra és becslési módszerekre van szükség.
- A pénzügyi folyamatok komplexitása miatt általában ezek egyike sem teljesül.

Hogyan kezeljük a kockázatot?

A kockázatkezelés néhány technikája:

- Diverzifikáció
- Fedezeti ügyletek (hedge-elés)
- Kereskedési limitrendszer
- Biztosítékok
- Tőkemegfelelés
- Rendszerbiztonság

Miről lesz tehát szó?

- A portfólióválasztási probléma
- A kockázatmérés módjai és problémái
- A kockázatbecslés problémái

A portfólió fogalma

- A befektetők a pénzügyi piacokon számtalan termék közül választhatnak.
- Egy befektető tulajdonában lévő termékek összességét az adott befektető portfóliójának nevezzük.
- Jelölje a befektetési lehetőségek számát N.
- Ekkor a portfóliót egy N-dimenziós $\mathbf{w}$ vektor írja le.
- A vektor w_i komponense az i. értékpapírba fektetett összeg.
- A $\mathbf{w}$ vektor komponenseit portfóliósúlyoknak nevezzük.

A Markowitz-modell

- A portfólió választás első matematikai modelljét a Nobel-díjas Harry Markowitz alkotta meg (1952).
- Modellfeltevések:
  - A befektetések hozama normális eloszlású.
  - Egy befektetés kockázatát hozamának szórásával mérjük.
  - A rövidre eladás korlátlanul megengedett. (A portfólió súlyok negatívak is lehetnek.)
  - Az egyes pénzügyi termékekből tetszőleges hányadot (pl. 13.46296 db) vehetünk.
  - A befektetők racionálisak, azonos információ alapján döntenek.

A hozamok eloszlása

- Jelöljünk ki egy T befektetési időtávot. (Pl. 1 hónap, 1 év stb.)
- Legyen az i. termék értéke t időpontban $S_i(t)$.
- Ennek a terméknek a hozama a T időszakban $X_i = S_i(T) - S_i(0)$.
- A hozamok legyenek Gauss-eloszlásúak
  - $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$ várható értékekkel és
  - $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$ kovarianciákkal

A portfóliók kockázata

- Tekintsünk egy $\mathbf{w}$ portfóliót!
- A portfólió hozama: $X(\mathbf{w}) = \sum_i w_i X_i$.
- A portfólió várható hozama: $\mu(\mathbf{w}) = \sum_i w_i \mu_i$.
- A portfólió varianciája: $\sigma^2(\mathbf{w}) = \sum_{i,j} \sigma_{ij} w_i w_j$.
- A portfólió kockázata, azaz szórása tehát $\sigma(\mathbf{w})$.

Diverzifikáció

- A szórás $\mathbf{w}$ konvex függvénye, azaz $\sum_i w_i = 1$ mellett

$$\sigma\left(\sum_i w_i X_i\right) \leq \sum_i w_i \sigma\left(X_i\right).$$

- Ezért tehát jobban járunk, ha nem egy értékpapírba fektetünk, hanem több értékpapír kombinációjába.
- Ezt nevezzük diverzifikációnak.
- De miért előnyös a diverzifikáció?

A diverzifikációs hatás

- Tekintsünk két értékpapírt X és Y hozammal!
- Legyen X és Y szórása σ_X és σ_Y, korrelációjuk pedig ρ
- Készítsünk portfóliót w és $1-w$ súlyokkal!
- A portfólió hozamának varianciája:
  $\sigma^2(w) = w^2\sigma_X^2 + (1-w)^2\sigma_Y^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_X\sigma_Y$
- Vizsgáljuk meg, mi történik különböző korrelációk mellett!

Tökéletesen korrelált hozamok

- Ha $\rho = 1$, akkor $\sigma(w) = w\sigma_X + (1 - w)\sigma_Y$.
- Tökéletes korreláció mellett a kockázatok összeadódnak.
- Ilyen esetben tehát nincs diverzifikációs előny.

Tökéletesen antikorrelált hozamok

- Ha $\rho = -1$, akkor $\sigma(w) = w\sigma_X - (1-w)\sigma_Y$.
- Tökéletes korreláció mellett a kockázatok kivonódnak egymásból.
- Így a $w/(1-w) = \sigma_Y/\sigma_X$ választás mellett az eredő variancia zérus.
- Ilyen esetben tehát a kockázat diverzifikációval teljesen megszüntethető.

Nem tökéletesen korrelált hozamok

- Ha $-1 < \rho < 1$, akkor
  $w\sigma_X - (1-w)\sigma_Y < \sigma(w) < w\sigma_X + (1-w)\sigma_Y$.
- Az eredő kockázat tehát kisebb az egyedi kockázatok összegénél, de biztosan nagyobb, mint nulla.
- Ilyenkor a kockázat csökkenthető diverzifikációval, de el nem tüntethető.
- A diverzifikáció tehát úgy mérsékli a kockázatot, hogy a hozamok egyedi ingadozásait kiátlagolja.
- A legjobb diverzifikációs hatást biztosító portfólió megkeresését portfólió-optimalizációnak vagy portfólióválasztásnak nevezzük.

A Markowitz-féle portfólió-optimalizációs feladat

- Egységnyi indulótőkével μ nagyságú várható hozamot szeretnénk elérni a lehető legalacsonyabb kockázatot mellett:

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = \mu$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

A portfóliók kockázata

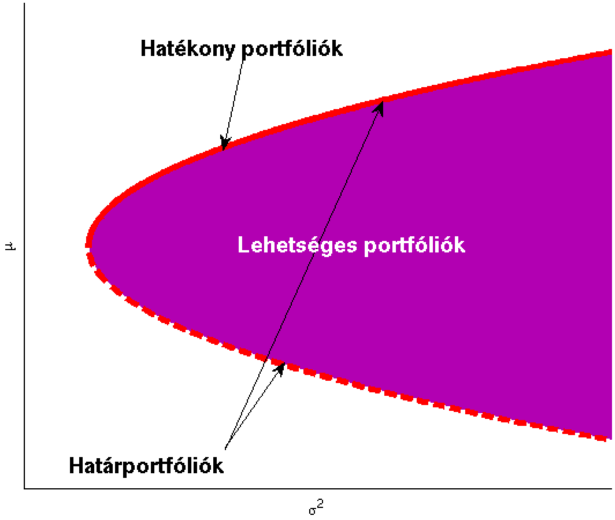
- A feladatot a Lagrange-multiplikátorok módszerével megoldva:

$$\sigma^{*2}(\mu) = \frac{A}{AC - B^2}\left(\mu - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{A},$$

ahol $A = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}$, $B = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}\mu_j$ és $C = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}\mu_i\mu_j$.

- Ez a görbe minden μ-höz megadja az elérhető legalacsonyabb kockázatot.
- A μ hozamú és $\sigma^*(\mu)$ kockázatú portfóliókat hatékonynak nevezzük.

Lehetséges, határ- és hatékony portfóliók



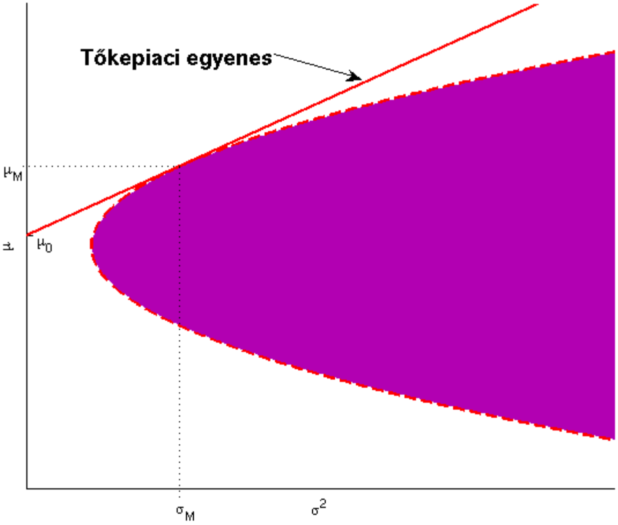
A portfóliók kockázata

- Racionális befektető tehát csak hatékony portfóliót választ.
- Minél nagyobb várható hozamot szeretnénk elérni, annál nagyobb kockázatot kell vállalnunk.
- A hatékony portfóliók közötti választás a befektetők szubjektív döntése.
- Az „agresszív” befektetők szívesen vállalnak nagy kockázatot, a „konzervatív” befektetők azonban inkább beérik alacsonyabb hozammal.
- A preferenciákat az ún. utilitás (hasznosság) függvénnyel szokás leírni, ezzel azonban itt nem foglalkozunk.

A kockázatmentes eszköz

- Tegyük fel, hogy létezik kockázatmentes befektetés.
- Ennek tehát a szórása zérus, hozama legyen μ_0.
- Kockázatmentesnek általában az államkötvényeket, vagy a legtőkeerősebb bankok betéteit szokás tekinteni.
- Szigorúan véve persze kockázatmentes befektetés nem létezik, de nagyon hasznos absztrakció.
- Egészítsük ki portfólió-modellünket a kockázatos termékkel!

Hatékony portfóliók kockázatmentes eszköz mellett



Hatékony portfóliók kockázatmentes eszköz mellett

- A csak kockázatmentes eszközt tartalmazó portfóliónak a $(0, \mu_0)$ pont felel meg.
- Ezt az eszközt szabadon kombinálhatjuk bármilyen kockázatos portfólióval.
- A lehetséges portfóliók tehát a $(0, \mu_0)$ pontból kiinduló egyenesek lesznek.
- A hatékony portfóliók halmaza kockázatos portfóliók paraboláját felülről érintő egyenes.
- Ezt tőkepiaci egyenesnek nevezzük. (Capital Market Line, CML)
- Az értintési pontbeli portfólió neve piaci portfólió, kockázata σ_M, várható hozama μ_M.

Hatékony portfóliók kockázatmentes eszköz mellett

- Ha van kockázatmentes eszköz, akkor minden befektető a CML-en helyezkedik el, ahol

$$\mu = \mu_0 + \frac{\mu_M - \mu_0}{\sigma_M}\sigma$$

- Minden portfólió w_0 egység kockázatmentes eszközből és $1 - w_0$ egység piaci portfólióból áll.
- Ha $w_0 > 0$, akkor kölcsönadunk μ_0 kamatra w_0-t a többit pedig a piaci portfólióba fektetjük.
- Ha $w_0 = 0$, akkor minden pénzünket a piaci portfólióba fektetjük.
- Ha $w_0 < 0$, akkor kölcsönveszünk μ_0 kamatra w_0-t és meglévő pénzünk mellett azt is a piaci portfólióba fektetjük.

A Markowitz modell fő tanulságai

- A diverzifikáció csökkenti a kockázatot.
- Racionális befektetők a hatékony portfóliók közül válogatnak.
- Nagyobb várható hozamért cserébe nagyobb kockázatot kell vállalnunk.
- Ha van kockázatmentes eszköz, akkor a kockázatos eszközöknek mindenki ugyanazt a kombinációját tartja.

A Markowitz modell korlátai

- A normalitás általában nem teljesül.
- Statikus szemléletű. (Stacionárius folyamat, egyetlen befektetési periódus)
- A szórás csak szimmetrikus, véges varianciájú eloszlásokra elfogadható kockázati mérték.
- Csak egyensúlyt modellez.
- Rövidre eladási, likviditási, stb. korlátok figyelmen kívül hagyása.
- Információs aszimmetriák.
- Becslési hibák kérdése.
- Stb.

Kockázati mértékek

A szórás előnyei

- Szemléletes jelentésű, a jövőbeli megtérülés bizonytalanságát méri.
- Az eredő kockázat több, akár nagyon eltérő jellegű befektetésre is meghatározható.
- Konvex, tehát a diverzifikáció hatására csökken.
- A portfóliósúlyoknak jól kezelhető (pl. differenciálható) függvénye.

A szórás hátrányai

- Nem minden eloszlásra létezik. (Pl. 2-nél kisebb kitevőjű, hatványfarkú eloszlásokra nem.)
- Az eloszlás szélére nem elég érzékeny.
- Nem tesz különbséget nyereség és veszteség között. (A váratlanul nagy nyereségtől nem félünk, csak a váratlanul nagy veszteségtől.)

Átlagos abszolút eltérés

- Egy X hozamú befektetés átlagos abszolút eltérése (Mean Absolute Deviation, MAD):

$$MAD(X) = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$$

- Hasonlít a szórásra.
- Előnye: érzékenyebb a szélekre, mint a szórás; 1-nél nagyobb kitevőjű, hatványfarkú eloszlásra is létezik, konvex
- Hátránya: a portfólió súlyok nemdifferenciálható függvénye

Szemivariancia

- Egy X hozamú befektetés szemivarianciája:

$$\nu^2(X) = \mathbb{E}\left(\min\{0, X - \mathbb{E}X\}\right)^2$$

- Ez a varianciától abban tér el, hogy csak az átlag alatti eltérések négyzetének a várható értékét vesszük.
- Előnye: csak az átlag alatti hozamokat veszi figyelembe, konvex
- Hátránya: pontosan akkor létezik, amikor a szórás; az eloszlás szélére nem elég érzékeny, a portfólió súlyok nemdifferenciálható függvénye

Kockázatott érték

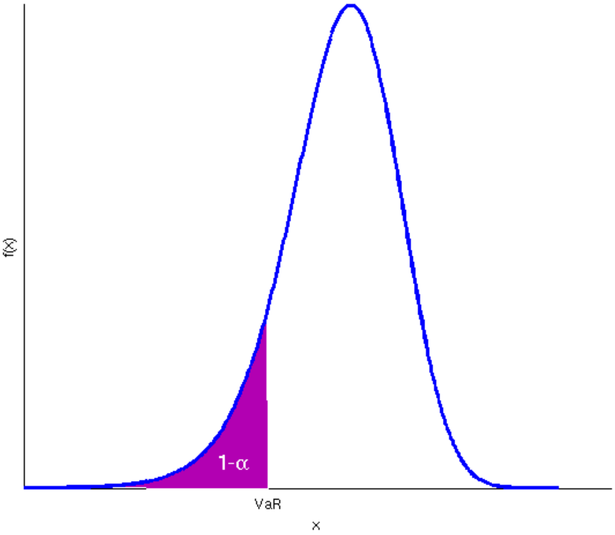
- A kockáztatott érték (Value-at-Risk, VaR) a ’80-as évek óta az egyik legnépszerűbb kockázati mérték.
- Azt mondjuk, egy befektetés VaR-ja α konfidenciaszinten az a pénzösszeg, amelynél többet csak $1-\alpha$ valószínűséggel veszíthetünk.
- Más lehetséges megfogalmazások:
  - Az $1-\alpha$ százaléknyi legrosszabb eset közül a legjobb esetben elszenvedett veszteség.
  - Az α százaléknyi legjobb eset közül a legrosszabb esetben elszenvedett veszteség.
- Az α tipikus értékei: 95%, 99%.
- A VaR tehát a hozameloszlás kvantilise.

VaR folytonos eloszlásokra

- Tegyük fel, hogy egy befektetés hozama X, melynek eloszlásfüggvénye $F(x)$ invertálható, például mert folytonos.
- Ekkor $VaR(X) = -F^{-1}(1-\alpha)$.
- A mínusz előjel azért kell, mert a veszteségekhez pozitív kockázatot rendelünk.
- A VaR tehát az az érték, amelynél kisebb értékekre a valószínűségsűrűség-függvény alatti terület éppen $1-\alpha$:

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{VaR(X)} f(x)dx.$$

VaR folytonos sűrűségfüggvény mellett



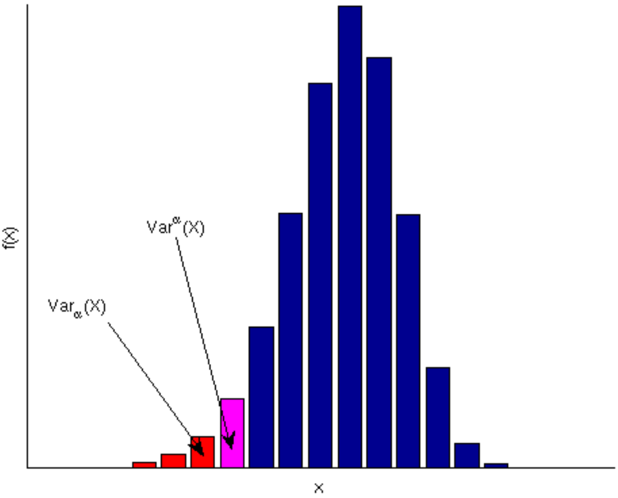
VaR diszkrét eloszlásokra

- Diszkrét eloszlások esetén az $F(X)$ eloszlásfüggvény „lépcsős”, nem invertálható.
- Pl.: X 5%-5%-90% eséllyel -500Ft, -100Ft és 1000Ft.
- Ekkor a VaR vajon 500Ft vagy 100Ft? Az előbbit alsó VaR-nak ($VaR_{5\%}(X)$), az utóbbit felső VaR-nak ($VaR^{5\%}(X)$) nevezzük.
- Általánosan:

$$VaR_\alpha(X) = -\sup\{x|F(x) < \alpha\},$$
$$VaR^\alpha(X) = -\inf\{x|F(x) > \alpha\}.$$

- Triviálisan $VaR^\alpha(X) \leq VaR_\alpha(X)$.
- Ha $F(x)$ folytonos, akkor $VaR^\alpha(X) = VaR_\alpha(X)$.

VaR diszkrét sűrűségfüggvény mellett



A VaR előnyei

- Kifejezetten a veszteségekre koncentrál.
- Tetszőleges eloszlásra létezik.
- Az eredő kockázat tetszőleges jellegű befektetések kombinációjára meghatározható.
- A kockázatot pénzveszteségben fejezi ki.

A VaR hátrányai

- A portfóliósúlyok nemdifferenciálható függvénye.
- Nem konvex.
- A VaR-nál nagyobb veszteségek eloszlása nem számít.
- Az utóbbi két hiányosság igen súlyos.

A VaR normális eloszlás mellett

- Legyen X eloszlása normális μ és σ paraméterekkel.
- Ekkor belátható, hogy $VaR_\alpha(X) = \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha) - \mu$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény.
- Ilyenkor a VaR konvex lesz.
- A VaR-nál nagyobb veszteségekről azonban a VaR továbbra sem mond semmit.

A koherens kockázati mértékek

- Hátrányai miatt a VaR általában alkalmatlan a kockázat mérésére.
- Ennek ellenére a gyakorlatban és a szabályozásban széleskörűen alkalmazzák.
- Ennek oka többek között a rendszer tehetetlensége.
- A koherens kockázati mértékek fogalma többek között a VaR (és egyéb mértékek) problémáira próbál választ adni.
- Hivatkozás: P Artzner, F Delbaen, JM Eber, D Heath, Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* Vol. 9, Num. 3. (1999)

A koherens kockázati mértékek definíciója

- Legyen Ω a hozamokat reprezentáló val. változók halmaza.
- Egy $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezünk.
- Egy ρ kockázati mérték koherens, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:
  - *Monotonitás*: $X, Y \in \Omega,\ X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$
  - *Szubadditivitás*: $X, Y \in \Omega,\ \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
  - *Pozitív homogenitás*: $X \in \Omega,\ a > 0 \Rightarrow \rho(aX) = a\rho(X)$
  - *Transzláció invariancia*: $X \in \Omega,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a$
- A fenti tulajdonságokat koherencia axiómáknak is nevezik.

Az axiómák szavakban

- *Monotonitás*: Ha A befektetés hozama sohasem kisebb, mint B-jé, akkor A nem lehet kockázatosabb B-nél.
- *Szubadditivitás*: A és B befektetések eredő kockázata nem lehet nagyobb, mint egyedi kockázataik összege.
- *Pozitív homogenitás*: Ha egy értékpapírba kétszer vagy háromszor annyi pénzt fektetünk, a kockázat is kétszer, háromszor akkora lesz.
- *Transzláció invariancia*: Ha pozíciónkhoz a hozamú kockázatmentes eszközt adunk, akkor a kockázatunk a-val csökken.

Megjegyzések a koherencia axiómákról

- A szubadditivitásból és a pozitív homogenitásból következik a konvexitás. Ez fordítva nem igaz!
- A szubadditivitás és pozitív homogenitás érvényessége vitatható. (Nagy pozíciókra, vagy alacsony likviditás mellett pl. nem érvényes.)
- A konvexitást azonban mindig elvárjuk.
- A transzláció invariancia miatt a koherens mértékek a kockázatot pénzveszteségben mérik.
- Emiatt a koherens mértékek elvileg jól alkalmazhatók a tőkemegfelelési szabályozásban.
- A VaR nem szubadditív, a szórás és MAD nem transzlációinvariáns.

A feltételes VaR (CVaR)

- A VaR egyik hibája (a konvexitás hiánya mellett), hogy a legnagyobb veszteségeket figyelmen kívül hagyja.
- Ezt orvosolja az (alsó és felső) Feltételes VaR:

$$CVaR_\alpha(X) = -\mathbb{E}\left[X|X < -VaR^\alpha(X)\right]$$
$$CVaR^\alpha(X) = -\mathbb{E}\left[X|X \leq -VaR^\alpha(X)\right]$$

- A CVaR tehát az $1-\alpha$ százaléknyi legrosszabb kimenetel átlaga.
- Belátható, hogy a VaR-hoz hasonlóan a CVaR általában nem szubadditív, tehát nem is koherens.
- (A többi három axiómát teljesíti.)

Az Expected Shortfal (ES)

- Egy apró változtatással a CVaR koherenssé tehető.
- Ehhez az átlagolás küszöbét nem veszteségben, hanem valószínűségben kell megadni.
- Az így kapott kockázati mérték az Expected Shortfall:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_p(X)dp,$$

Az ES folytonos eloszlásokra

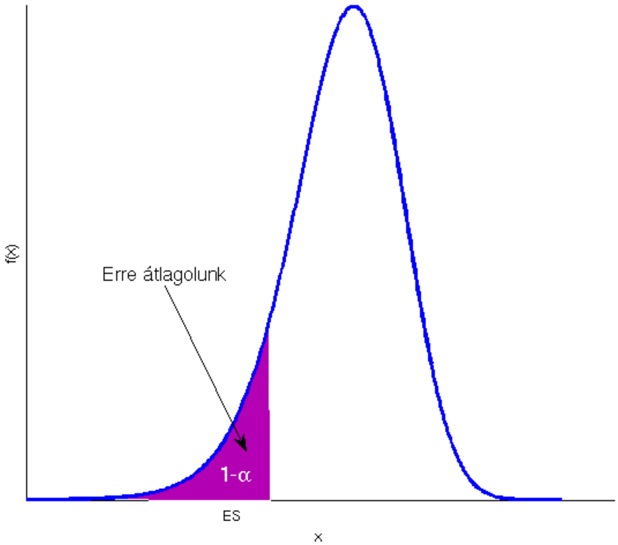
- Tegyük fel, hogy $F_X(x)$ differenciálható (tehát invertálható).
- Ekkor $VaR_\alpha = F_X^{-1}(1-\alpha)$.
- Ilyenkor tehát az ES:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(p)dp =$$

$$= -\frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{VaR_\alpha(X)} f_X(x)xdx = -\mathbb{E}\left[X | X \leq -VaR_\alpha(X)\right].$$

- Azaz $CVaR_\alpha(X) = CVaR^\alpha(X) = ES_\alpha(X)$.

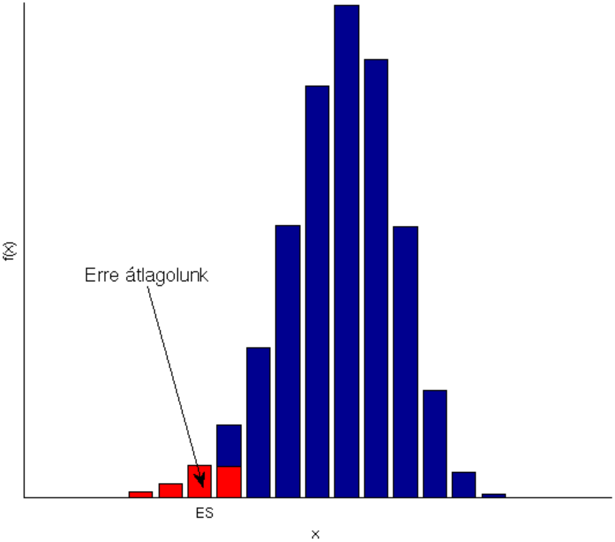
Az ES folytonos eloszlásokra



Az ES diszkrét eloszlásokra

- Ekkor $F_X(x)$ nem invertálható.
- Előfordulhat, hogy $VaR_\alpha(X) > VaR^\alpha(X)$.
- Például legyen X 4-2-94% valószínűséggel -600Ft, -60Ft és 800Ft.
- Ekkor $CVaR_{95\%} = 600\text{Ft}$,
  $CVaR^{95\%} = \frac{4}{6} \cdot 600\text{Ft} + \frac{2}{6} \cdot 60\text{Ft} = 420\text{Ft}$.
- Az ES azonban a 2% valószínűségű $60Ft$-os veszteséget csak 1% erejéig veszi figyelembe:
  $ES_{95\%} = \frac{4}{5} \cdot 600\text{Ft} + \frac{1}{5} \cdot 60\text{Ft} = 492\text{Ft}$.
- Általában is igaz, hogy $CVaR_\alpha(X) \geq ES_\alpha(X) \geq CVaR^\alpha(X)$.

Az ES diszkrét eloszlásokra



Az ES előnyei

- Belátható, hogy az ES koherens mérték.
- Az ES tehát konvex.
- Figyelembe veszi a legnagyobb lehetséges veszteségeket.
- Bár a portfólió súlyok nemdifferenciálható függvénye, a portfólióválasztási feladat egy könnyen kezelhető lineáris programozási problémára vezet.
- (Az ES-nek hátrányai is vannak, erre később még röviden visszatérünk.)

A kockázat becslése

- Eddig feltettük, hogy a hozamok eloszlását és annak paramétereit ismerjük.
- A gyakorlatban természetesen nem ez a helyzet.
- Gyakran még megközelítőleg sincs fogalmunk az árfolyamokat vezérlő folyamatokról.
- Ilyenkor múltbeli (historikus) megfigyelésekre kell hagyatkoznunk.
- Portfóliót tehát csak bizonyos (nem feltétlenül helyes) előfeltevések, és véges számú megfigyelés alapján tudunk választani.

A Markowitz-modell véges minta mellett

- Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a hozamok eloszlása továbbra is normális.
- Az eloszlás paramétereit ugyanakkor nem ismerjük, tehát becsülnünk kell.
- Tegyük fel, hogy az N db. értékpapír hozamát megfigyeltük T db. egymást követő időszakban.
- Az i. értékpapír realizált hozama a t. időszakban legyen x_{it}.
- Az x_{it} megfigyelések tehát egy $N \times T$-s mátrixba írhatók.

Hatékony portfóliók becslése

- Az értékpapírok becsült hozamai és kovariancia mátrixa:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_{it}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \hat{\mu}_i)(x_{jt} - \hat{\mu}_j)$$

- Egy $\mathbf{w}$ portfólió becsült kockázata $\hat{\sigma}^2(\mathbf{w}) = \sum_{ij} \hat{\sigma}_{ij} w_i w_j$.
- A hatékony portfóliók becsléséhez tehát $\hat{\sigma}^2(\mathbf{w})$-t kell minimalizálnunk, $\sum_i w_i \hat{\mu}_i = \mu$ és $\sum_i w_i = 1$ mellett.

A becslési hiba jellemzése

- Tegyük most fel, hogy ismerjük a hozamok eloszlásának valódi μ_i, σ_{ij} paramétereit.
- A valódi optimális portfólió: w_i^*.
- Ennek kockázata: $\sum_{ij} \sigma_{ij} w_i^* w_j^*$.
- Képzeljük magunkat a befektető helyébe, aki csak $\hat{\mu}_i$-t és $\hat{\sigma}_{ij}$-t ismeri.
- A becsült optimális portfólió: $\hat{w}_i^*$.
- A becsült optimum VALÓDI kockázata: $\sum_{ij} \sigma_{ij} \hat{w}_i^* \hat{w}_j^*$.
- Vezessük be a következő mennyiséget:

$$q_0 = \sqrt{\frac{\sum_{ij} \sigma_{ij} \hat{w}_i^* \hat{w}_j^*}{\sum_{ij} \sigma_{ij} w_i^* w_j^*}}$$

A becslési hiba jellemzése

$$q_0 = \sqrt{\frac{\sum_{ij} \sigma_{ij} \hat{w}_i^* \hat{w}_j^*}{\sum_{ij} \sigma_{ij} w_i^* w_j^*}}$$

- Tehát $q_0 \geq 1$, és $q_0 - 1$ megmondja, hány százalékkal vállal a befektető nagyobb kockázatot amiatt, hogy az eloszlás paramétereit csak mintából tudja becsülni.
- A befektető q_0-t természetesen nem tudja kiszámolni, de ha mi generáljuk a folyamatot, akkor mi igen.
- A becsült optimum, így q_0 is mintáról mintára ingadozik.

A becslési hiba jellemzése

- q_0 tehát véletlen változó, de numerikus vagy analitikus módszerrel tanulmányozhatjuk eloszlását és momentumait.
- Ebben felhasználható például a részecskefizikában alkalmazott véletlenmátrix-elmélet, vagy a spinüvegek modellezésében alkalmazott replika-módszer.
- q_0 fő tulajdonságai:
  - q_0 szórása az $N \to \infty$ limeszben 0-hoz tart.
  - Az $N \to \infty$ és $N/T = const$ limeszben $q_0 = \frac{1}{\sqrt{1-N/T}}$
  - Véges N-re és T-re $\mathbb{E}[q_0^2] \approx \frac{1}{1-N/T}$
- Az $N \to \infty$ $N/T = const$ limeszben tehát q_0 egyáltalán nem függ μ_i-től és σ_{ij}-től!

A becslési hiba jellemzése

- Azt látjuk tehát, hogy amint $T \to N$, a becslési hiba divergál!
- Ha például $T = 2N$, akkor $q_0 \approx \sqrt{2} = 1.4142$, tehát ha kétszer annyi megfigyelésünk van, mint értékpapírunk, akkor a becsült optimum kockázata átlagosan 41%-kal lesz magasabb, mint a valódi optimumé.
- Ha $T < N$, akkor nincs megoldás. Ez annak a következménye, hogy ilyenkor $\hat{\sigma}_{ij}$ nem invertálható.
- A valóságban persze az eloszlások nem normálisak, sőt nem is stacionáriusak, így az amúgy is divergens q_0 minden bizonnyal még alul is becsüli a becslési hibát.

További megjegyzések

- A kovariancia mátrix becslése számos módon javítható.
- A fenti analízis más kockázati mértékekre is elvégezhető.
- Különösen érdekes eredményt kapunk az ES-re: a becsült ES-nek nem minden mintán van minimuma, így az ES becslése a szórásénál is sokkal instabilabb!
- Ez ráadásul minden koherens mértékre igaz, ami komolyan megkérdőjelezi gyakorlati alkalmazhatóságukat.

Néhány érdekes téma

- A tőkemegfelelési szabályok, és az általuk definiált kockázati mértékek
- A kockázat becslési módszerei
- Dinamikus kockázati mértékek
- Hitelkockázat és működési kockázat
- ...